

三轴剪切总应力强度指标的回归求值

王星辉

(西安建材地质工程勘察院, 陕西 西安 710003)

[摘要] 工程勘察三轴试验的总应力强度指标的计算, 运用解析几何原理导出任意两个应力圆公切线切点坐标计算公式, 尤其是直接计算切线斜率。各切点通过线性回归建立公切线(包线)的直线方程, 进而计算凝聚力 C_u 和摩擦角 φ_u 。采用数据直接计算方法, 替代了以前手工图解或计算机交互图解, 计算速度快, 精度高。

[关键词] 三轴剪切; 线性回归; 凝聚力; 摩擦角

[中图分类号] TU432 [文献标识码] A [文章编号] 1672-6561(2004)01-0052-03

[作者简介] 王星辉(1960—), 男, 山东滨州人, 高级工程师, 现从事岩土工程勘察工作。

1 C_u, φ_u 求值的一般方法

对于测取的 n (一般 $n \geq 3$) 组应力值: σ_{1i}, σ_{3i} ($i = 1, 2, \cdots, n$), 用下式计算参数 O_i 和 R_i :

$$O_i = \frac{\sigma_{1i} + \sigma_{3i}}{2},$$

$$R_i = \frac{\sigma_{1i} - \sigma_{3i}}{2}, \tag{1}$$

式中: σ_{1i} 为第 i 组应力值的大主应力 (kPa); σ_{3i} 为第 i 组应力值的小主应力 (kPa); O_i 为法向应力 σ (圆心横坐标); R_i 为剪应力 τ (摩尔圆半径)。

在以法向应力为横轴、以剪应力为纵轴的坐标系中, 以 $(O_i, 0)$ 为圆心, 以 R_i 为半径, 绘制不同压力下破坏总应力圆(即摩尔圆)(图 1)。图 1 中绘制各摩尔圆的公切线, 则切线的倾角即为摩擦角 φ_u , 截距为凝聚力 C_u 。由于试验数据存在一定的误差,

必须近似地绘制其公切线, 常规方法下会造成一定的人为误差。采用计算机自动处理, 则可以最大限度地减少这种误差。

2 两两组合圆公切线切点求解

计算机自动处理, 同样要对上述 n 个摩尔圆求出包线(公切线)。由于试验数据存在一定的偶然误差, 不可能有精确的公切线, 但两个圆无论如何都会存在公切线(只要不是嵌套方式)。因此, 把 n 个摩尔圆进行两两组合, 求出每一组合两圆公切线的切点, 经回归分析求出 n 个圆的包切线方程。

如图 2, 对于两个圆 O_1, O_2 , 其切线为 L , 其切点分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 两圆切点对纵向半径的偏移角分别为 θ_1, θ_2 , 切线 L 的倾角为 θ , 从图 1 可知

$$\theta = \theta_1 = \theta_2,$$

$$\begin{cases} x_1 = O_1 - R_1 \sin \theta, \\ y_1 = R_1 \cos \theta, \end{cases} \tag{2}$$

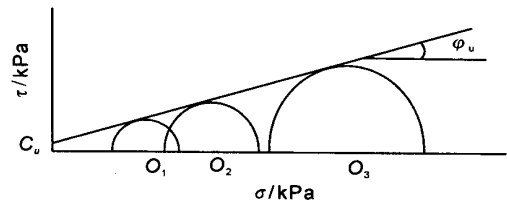


图 1 C_u, φ_u 计算示意图
Fig. 1 Calculation of C_u and φ_u

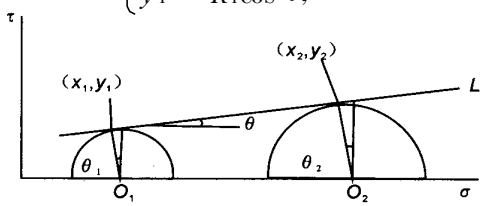


图 2 两圆公切线及切点坐标
Fig. 2 Common tangent line and its tangent points coordinates of two cycles

$$\begin{cases} x_2 = O_2 - R_2 \sin \theta, \\ y_2 = O_2 \cos \theta, \end{cases} \quad (3)$$

式中: x, y 坐标分别对应于图2中 σ, τ 坐标。根据解析几何原理, 切线 L 的直线方程为

$$y = \tan \theta (x - x_1) + y_1 = \tan \theta (x - x_2) + y_2, \quad (4)$$

将式(2), 式(3)代入式(4), 得方程

$$\begin{aligned} \tan \theta (x - O_1 + R_1 \sin \theta) + R_1 \cos \theta = \\ \tan \theta (x - O_2 + R_2 \sin \theta) + R_2 \cos \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

整理得 $\sin \theta (O_2 - O_1) = (R_2 - R_1)$,

$$\text{则有 } \theta = \arcsin \frac{R_2 - R_1}{O_2 - O_1}. \quad (6)$$

为便于计算机编程处理, 利用图3 将式(6)变换为

$$\theta = \arctan \frac{R_2 - R_1}{\sqrt{(O_2 - O_1)^2 - (R_2 - R_1)^2}}. \quad (7)$$

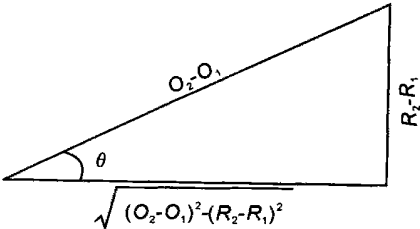


图 3 反三角函数变换示意图
Fig. 3 Summary figure to change the reerse triangular function

由式(1)可得

$$\begin{aligned} (O_2 - O_1)^2 - (R_2 - R_1)^2 = \\ \left\{ \frac{\sigma_{12} + \sigma_{32}}{2} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{31}}{2} \right\}^2 - \\ \left\{ \frac{\sigma_{12} - \sigma_{32}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{31}}{2} \right\}^2 = \\ (\sigma_{32} - \sigma_{31})(\sigma_{12} - \sigma_{11}), \end{aligned}$$

则式(7)可改写为

$$\theta = \arctan \frac{R_2 - R_1}{\sqrt{(\sigma_{32} - \sigma_{31})(\sigma_{12} - \sigma_{11})}}. \quad (8)$$

由三轴剪切试验方法可知: $\sigma_{32} > \sigma_{31}, \sigma_{12} > \sigma_{11}$, 故式(7), 式(8)始终有意义, 可利用其计算两摩尔圆公切线的倾角 θ , 将其代入式(2), 式(3) 计算出两个切点的坐标 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 。类似地, 计算出各摩尔圆每两两组合圆的公切线的切点坐标。

3 回归求值

以上计算出 n 个摩尔圆两两公切的 m 个切点

坐标, 切点数 m 由下式求得

$$m = 2 \sum_{i=1}^{n-1} i = 2 \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1),$$

各切点的坐标为 $(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, m$ 。将 m 个切点进行一元线性回归, 可求出 n 个摩尔圆包切线的回归直线。

设其直线方程 $y = a + bx$, 这里的 y, x 分别对应图1的 τ 轴和 σ 轴; a, b 称为回归系数, 又分别是包切线的截距和斜率。根据最小二乘原理有

$$Q(a, b) = \sum_{j=1}^m [y_j - (a + bx_j)]^2,$$

式中: $Q(a, b)$ 为实测值与回归计算值的误差平方和, 令其一阶编导数为 0, 则有

$$\begin{cases} -2 \sum_{j=1}^m [y_j - (a + bx_j)] = 0, \\ -2 \sum_{j=1}^m [y_j - (a + bx_j)] x_j = 0. \end{cases} \quad (9)$$

解方程得

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^m y_j}{m}, \\ b = \frac{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2}, \\ a = \bar{y} - b\bar{x}, \end{cases} \quad (10)$$

则包切线回归直线方程为: $y = a + bx$, 式(10) 中的 \bar{x}, \bar{y} 分别为 $\{x_j\}$ 和 $\{y_j\}$ 的平均值。其截距 a 即为土的凝聚力 C_u , 斜率 b 即为土的摩擦角 φ_u 的正切, 则

$$\begin{cases} C_u = a, \\ \varphi_u = \arctan(b). \end{cases} \quad (11)$$

4 数据可靠性处理

对于试验数据的准确性, 应该进行误差判别, 以确定原始数据是否可以计算求值, 并剔除离散性较大的数据。可采用相关系数法确定土的三轴试验数据是否可用, 并利用均方差对各切点中离散性较大的点进行剔除。

4.1 试验数据可靠性判别

对于 n 组试验数据, 如果绘制的各摩尔圆的离散性太大, 则无法用图解计算 C_u 和 φ_u , 可采用相关系数判别法来确定某一土样的试验数据是否可进

行求值计算。

对于计算出的各切点 (x_j, y_j) , 采用下式计算其一元线性回归的相关系数

$$r = \frac{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2 \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2}} \quad (12)$$

从式(12)可以看出, $|r| \leq 1.0$, 当其越接近于 1.0, 则各切点的分布则越接近于直线; 当 $|r| = 1$ 时, 所有各切点分布在一条直线上。一般来说, 当 $|r| \leq 0.6$ 时, 可以认为各切点分布已非线性, 说明试验数据误差太大, 不能用其进行凝聚力 C_u 和摩擦角 φ_u 的求解。

4.2 离散切点的取舍

对于求取的 m 个切点, 在进行一元线性回归时, 有时个别点远离回归直线, 根据数理统计的原则, 偏差太大的点应该舍去。

用下式计算各切点一元线性回归的标准差(均方差)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m [y_j - (a + bx_j)]^2}{m}} \quad (13)$$

对于每一对 (x_j, y_j) , 计算其偏离回归直线的差值 $s_j = y_j - (a + bx_j)$, 则当 $s_j > zs$ 时, 第 j 个切点被舍去。一般 z 值可根据土体的性质在 2 ~ 3 范围内取值。

当根据上述原则对离散性较大的切点进行剔

除后, 再进行回归求解, 则计算结果更准确。当 $n = 3$ (这时 $m = 6$) 时, 则不能再进行切点剔除。

5 结论

对于三轴剪切数据, 可采用下列方法处理:

(1) 采用式(7), 式(2), 式(3)计算各摩尔圆两两公切的切点坐标。

(2) 用式(12)计算各切点的一元线性相关系数, 判别原始数据是否合乎求值计算的误差要求。

(3) 用式(13)计算各切点相对于一元线性回归的均方差, 并进行切点的离散性取舍。

(4) 利用式(10)进行回归分析, 计算包切线的斜率和截距。

(5) 用式(11)计算三轴剪切试验土的凝聚力 C_u 和摩擦角 φ_u 。

方法采用数据自动处理, 省略了抗剪强度参数计算的图解法, 极大地提高了计算效率。由于采取了试验数据误差判别、切点离散性取舍、一元线性回归等手段, 大大保证了计算结果的准确性, 且由于公式简便、具体, 便于进行计算机程序设计。

[参 考 文 献]

- [1] 陈家鼎, 刘婉如, 汪仁官, 等. 概率统计讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994.
- [2] 李岳生, 黄友谦. 数值逼近[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [3] 交通部公路科学研究所. 公路土工试验规程[S]. 北京: 人民交通出版社, 1993.

Regression solution for general stress intensity of the tri-axis shearing

WANG Xing-hui

(Geological Investigation and Survey Institute of Building-Materials of Xi'an, Xi'an 710003, China)

Abstract: In order to calculate the intensity of general stress in tri-axis test in geotechnical investigation, the author uses cartesian geometry principle to derivate calculation functions of common tangent points coordinates of every circle by the common tangent line. Especially, the slope tangent line is calculated directly. With regard to all of tangent points, the linear regression method is used to derive the equation of the tangent line, and then to calculate the coaction force C_u and the friction angle φ_u of the soil. This direct calculating method may take place of the illustration methods by hands or interactive illustration method on the computer, and is faster and may take more precise.

Key words: tri-axis shearing; linear regression; cohesion; friction angle

(英文审定: 苏生瑞)