

灰色预测模型在高层建筑物沉降预测中的应用研究

李日云, 王 利, 张双成

(长安大学 地质工程与测绘工程学院, 陕西 西安 710054)

[摘要] 详细讨论了一阶一元灰色预测模型 $GM(1, 1)$ 的基本内容及建模过程, 并成功地将 $GM(1, 1)$ 模型应用于高层建筑物沉降监测的预测预报, 相应地编写了基于 MATLAB 的灰色系统沉降预测程序, 便于实际应用。实践证明, 灰色预测模型 $GM(1, 1)$ 在沉降预测中具有较高的应用价值。

[关键词] 灰色预测模型; $GM(1, 1)$ 模型; 沉降预测; MATLAB

[中图分类号] P207 [文献标识码] A [文章编号] 1672-6561(2005)01-0084-04

[作者简介] 李日云(1949-), 男, 山东昌乐人, 工程师, 从事测量实验教学研究。

对高层建筑物进行沉降监测的目的不仅仅是观测其在工程时刻的沉降值, 更为重要的是根据已观测的量值, 通过建立一定的模型来预测其在未来某一时刻的可能沉降值, 进而分析其安全性, 将可能的损失消除在萌芽状态或最大限度地减轻损失。沉降预测有回归分析法、确定函数法、时序分析法等, 但这些方法通常要求有大量样本, 而且要求具有典型的概率分布, 这在实际工作中往往难以满足。沉降预测中既包含已知信息, 又有未知信息, 而且处于变化之中, 这样预测沉降量未来变化的问题, 实质上可以看作一个灰色问题^[1~4]。

目前灰色预测模型在国民经济预测中得到了一定程度的应用, 现就这一模型在高层建筑物沉降预测中的应用进行探讨, 提出在高层建筑物沉降预测中如何建立灰色模型和如何实际应用该模型。

1 灰色预测模型的建立

灰色预测模型又称 GM 模型, 它是一组用微分方程给出的数学模型。利用 GM 模型可以对所研究系统的发展变化进行全局观察、分析和长期预测。根据预测因子的数目可分为一阶多元预测模型 $GM(1, N)$ 和一阶一元预测模型 $GM(1, 1)$ ^[1, 5]。

1.1 $GM(1, N)$ 模型

$GM(1, N)$ 模型用于观察各因子对系统的影响程度, 反映了主因子与各自变量因子在时间序列动态发展过程中的函数关系。

1.1.1 灰数的组成

某个系统的原始数据往往是无规律的, 是随机量, 可以看作是在一定区域内变化的灰色量。为了提高原始数据的规律性, 对灰色量采用数据生成方式, 获得规律性较强的生成数列。用于灰色预测模型的灰数生成方法主要是累加生成法 (AGO - Accumulated Generating Operation)。

对于某一指标, 在一连续时间序列里组成原始数据列:

$$x^{(0)} = x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)$$

作一次累加生成数据列 $x^{(1)}$ 和作 m 次累加生成数据列 $x^{(m)}$ 由下式构成:

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)}(i) &= \sum_{k=1}^i x^{(0)}(k) \\ x^{(m)}(i) &= \sum_{k=1}^i x^{(m-1)}(k) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

基于光滑离散数据列递增指数律的思想, 生成的数列比原始数列的指数递增规律性要强, 并且弱化了原始数列的随机性。

1.1.2 模型参数的解算^[6~8]

“1-AGO”数列 $GM(1, N)$ 的预测模型经白化微分后得方程模型:

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)} = b_1 x_2^{(1)} + b_2 x_3^{(1)} + \cdots + b_{N-1} x_N^{(1)} \tag{2}$$

式中: x_1 为主因子; $x_i (i = 2, 3, \cdots, N)$ 为影响因子, a, b_i 为待求系数, 经离散化分析后有:

$$x_1^{(0)}(k) = a \left\{ -\frac{1}{2} [x_1^{(1)}(k) + x_1^{(1)}(k-1)] \right\} + b_1 x_2^{(1)}(k) + b_2 x_3^{(1)}(k) + \cdots + b_{N-1} x_N^{(1)}(k)$$

对于时间序列 $k = 2, 3, \cdots, n$, 式(2)变为式(3):

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} [x_1^{(1)}(1) + x_1^{(1)}(2)] \\ -\frac{1}{2} [x_1^{(1)}(2) + x_1^{(1)}(3)] \\ \vdots \\ -\frac{1}{2} [x_1^{(1)}(n-1) + x_1^{(1)}(n)] \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} x_2^{(1)}(2) \\ x_2^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x_2^{(1)}(n) \end{bmatrix} + \cdots + b_{N-1} \begin{bmatrix} x_N^{(1)}(2) \\ x_N^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix} \tag{3}$$

设 $Y_N = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} [x_1^{(1)}(1) + x_1^{(1)}(2)] & x_2^{(1)}(2) & x_3^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ -\frac{1}{2} [x_1^{(1)}(2) + x_1^{(1)}(3)] & x_2^{(1)}(3) & x_3^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2} [x_1^{(1)}(n-1) + x_1^{(1)}(n)] & x_2^{(1)}(n) & x_3^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix}$$

待求参数数列 $\hat{a} = (a, b_1, b_2, \cdots, b_{N-1})^T$, 式(3)可写为:

$$Y_N = B\hat{a} \tag{4}$$

式(4)为 $n-1$ 个方程组成的线性方程组, N 个未知量。一般 $n-1 > N$, 根据误差理论的间接平差原理^[9], 式(4)的最小二乘解为:

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y_N \tag{5}$$

将式(5)解出的参数代入式(2)得微分方程的解, 即“1-AGO”预测模型为:

$$x_1^{(1)}(k) = \left[x_1^{(0)}(1) - \sum_{i=2}^n \frac{b_{i-1}}{a} x_i^{(1)}(k) \right] e^{-ak} + \sum_{i=2}^n \frac{b_{i-1}}{a} x_i^{(1)}(k), k \geq 2 \tag{6}$$

式(6)通过累减生成还原数据:

$$x_1^{(1)}(1) = x_1^{(0)}(1) \tag{7}$$

$$x_1^{(1)}(k) = x_1^{(1)}(k-1) - x_1^{(0)}(k), k \geq 2 \tag{8}$$

1.2 灰色 GM(1, 1)模型^[7, 10]

GM(1, 1)是 GM(1, N)中 $N = 1$ 的特例。设某沉降监测网中某一监测点的各期数据组成时间序列 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$, 对原始数据序列 $x^{(0)}$ 作一次累加生成新的序列 $x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n))$, 其中 $x^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^i x^{(0)}(k)$, 则 GM(1, 1)的白化形式方程为:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)}(t) = u \tag{9}$$

这是一阶一元微分方程模型, 其中 a, u 是待识别参数。式(9)解离散形式为:

$$x^{(1)}(k) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] e^{-a(k-1)} + \frac{u}{a} \tag{10}$$

其中: $\hat{a} = (a, u)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_N$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} [x_1^{(1)}(1) + x_1^{(1)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2} [x_1^{(1)}(2) + x_1^{(1)}(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2} [x_1^{(1)}(n-1) + x_1^{(1)}(n)] & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_N = [x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \cdots, x^{(0)}(n)]^T$$

设 $x^{(1)}(k)$ 是由式(10)得到的模型计算值, 由 $x^{(1)}(k)$ 累减: $x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)$, 得变量 $x^{(0)}(k)$ 的 GM(1, 1)模型计算值 $\hat{x}^{(0)}(k)$, 即:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(1) &= x^{(0)}(1) \\ \hat{x}^{(0)}(k) &= \left[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] (1 - e^a) e^{-a(k-1)} \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

式中: $k = 2, 3, \cdots, n$ 。或者对式(10)求导, 得到 $x^{(0)}(k)$ 的模型计算值 $\hat{x}^{(0)}(k)$:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = -a \left[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] e^{-a(k-1)} \tag{12}$$

式(9)~式(12)是 GM(1, 1)模型的基本公式。

1.3 灰色 GM(1, 1)模型精度

灰色 GM(1, 1)模型精度由下两式来计算检验^[7]:

(1)原始数据列的方差:

$$\sigma_x^2 = S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x^{(0)}(i) - \bar{x}^{(0)}]^2 \tag{13}$$

(2)残差方差:

$$\sigma_q^2 = S_q^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [q^{(i)} - \bar{q}]^2 \tag{14}$$

式中: $\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(0)}(i); q^{(i)} = x^{(0)}(i) - x^{(0)}(i);$
 $\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q^{(i)}$, 其后验方差比为 $C = \frac{S_1}{S_2}$ 。小误差概
率为 $P = \{ |q^{(i)} - \bar{q}| < 0.6745S_2 \}$ 。

一个好预测模型, C 值越小越好, 一般要求 $C < 0.35$, 最大不超过 0.65。预测模型好坏的另一指标是小误差概率, 要求 $P > 0.95$, 不得 < 0.7 。

参照 P 与 C 的大小, 可将预测精度分为 4 个等级, 如表 1。

表 1 灰色预测模型精度等级

Table 1 Precising class of gray forecasting model		
预测精度等级	P	C
好	> 0.95	< 0.35
合格	> 0.80	< 0.45
勉强	> 0.70	< 0.50
不合格	≤ 0.70	≥ 0.65

2 基于 MATLAB 灰色系统沉降预测程序

为了便于应用灰色预测模型, 根据上述灰色 GM (1, 1) 模型, 编写了基于 MATLAB 灰色系统沉降预测程序 Greymodel.m。其主要功能是根据输入的原始数据列, 通过数据处理得到模型计算值和预测值, 并对模型进行精度等级判定^[9, 11]。

3 GM (1, 1) 模型在高层建筑物沉降预测中的应用实例及分析

西安市南郊某 18 层建筑物布置了 11 个沉降监测点, 进行了 24 次沉降观测, 将其中两点 (C_5, C_6) 在施工期间的 13 期观测值列于表 2, 用其中前 5 期观测值来建立灰色预测模型进行沉降预测, 并与其余 8 期观测值进行比较, 预测数据及残差均见表 2。据此可研究灰色预测模型精度及实际应用价值。

从表 2 中可以看出, 此两点的灰色预测 GM (1, 1) 模型的精度都很高, 预测精度均为一级。后验方差比值 C 很小, 后 8 期的预测值与实际观测值很接近, 这说明所建立的 GM (1, 1) 预测模型可靠, 在高层建筑物沉降预测中应用 GM (1, 1) 预测模型是完全可行的。同时, 从表中也可明显地看出, 随着预测期数的增加, 预测值与实测值的比较

差也在相应地增大。这时, 就需要对模型进行修正, 以确保预测值的准确性, 提高预测精度。

表 2 灰色预测模型 GM (1, 1) 在某高层建筑物沉降预测中的应用及精度分析

Table 2 Application and precision analysis of gray forecasting model GM (1, 1) in settlement forecast of one building

观测日期	C_5 点		
	实测值 /mm	预测值 /mm	残差 /mm
1999. 06. 12	51. 8	51. 8000	0. 0000
1999. 06. 20	51. 5	51. 7601	- 0. 2601
1999. 06. 27	51. 3	51. 0123	0. 2877
1999. 07. 04	50. 5	50. 2753	0. 2247
1999. 07. 17	49. 3	49. 5490	- 0. 2490
1999. 08. 02	48. 3	48. 8332	- 0. 5332
1999. 08. 13	47. 4	48. 1278	- 0. 7278
1999. 08. 25	46. 7	47. 4325	- 0. 7325
1999. 09. 07	45. 9	46. 7472	- 0. 8472
1999. 09. 17	44. 0	46. 0719	- 2. 0719
1999. 09. 27	43. 6	45. 4063	- 1. 8063
1999. 10. 05	42. 4	44. 7504	- 2. 3504
1999. 11. 02	39. 2	42. 8388	- 3. 6388

后验方比值 C $C = S_1 / S_2 = 0.2548$

小误差概率 P $P = 1$

预测精度等级 第一级: 好

观测日期	C_6 点		
	实测值 /mm	预测值 /mm	残差 /mm
1999. 06. 12	90. 6	90. 6000	0. 0000
1999. 06. 20	90. 4	90. 6309	- 0. 2309
1999. 06. 27	90. 1	89. 8049	0. 2951
1999. 07. 04	89. 1	88. 9864	0. 1136
1999. 07. 17	88. 0	88. 1754	- 0. 1754
1999. 08. 02	86. 7	87. 3718	- 0. 6718
1999. 08. 13	85. 6	86. 5755	- 0. 9755
1999. 08. 25	84. 6	85. 7864	- 1. 1864
1999. 09. 07	84. 0	85. 0046	- 1. 0046
1999. 09. 17	82. 6	84. 2299	- 1. 6299
1999. 09. 27	81. 7	83. 4622	- 1. 7622
1999. 10. 05	80. 9	82. 7015	- 1. 8015
1999. 11. 02	77. 8	80. 4609	- 2. 6609

后验方比值 C $C = S_1 / S_2 = 0.1981$

小误差概率 P $P = 1$

预测精度等级 第一级: 好

在建立模型时要注意 GM (1, 1) 预测模型是以等时间间隔序列为基础的, 而在实际工作中所得原始数据往往是非等间隔序列, 这时必须把非等间隔序列转换成等间隔序列, 经一次累加生成后, 才能近似地拟合成一阶微分方程, 即 GM (1, 1) 模型。

4 结束语

在沉降观测过程中, 引起监测建筑物沉降因素是复杂多样的, 且彼此间的关系是灰色的。灰色预测模型正是适应这种客观需要, 通过对灰色系统动态过程发展态势量化分析, 使这种灰色系统各因素间的“灰”关系“白化”, 即清晰化^[3, 12]。GM 模型在实际运用中, 应根据实际情况随着观测次数的增加不断修正预测模型, 以便及时提高预测精度。对于一般建筑物, 其施工期间的沉降监测大都是下沉趋势, 运用灰色模型法科学、合理, 更符合其灰色动态变化, 而且这种灰色方法的数学模型逻辑性较强, 计算公式简明, 特别适用于计算机编程计算, 数据处理比较方便、快捷, 在实际应用中能够创造更好的经济效益。

[参 考 文 献]

[1] 邓聚龙. 灰色系统基本方法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1987.

[2] 邓聚龙. 灰色系统论文集[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1989.

[3] 赵显富, 郭淳. 灰色预测模型及其在沉降预测中的应用[J]. 铁路航测, 2002, (3): 30~ 32.

[4] 杨志强, 李菊华, 李亚红. 基于灰色理论的滑坡变形反演与预测研究[J]. 西安工程学院学报, 1999, 21(2): 54~ 56.

[5] 邓聚龙. 灰色控制系统[M]. 第 2 版. 武汉: 华中理工大学出版社, 1993.

[6] 邓聚龙. 多维灰色规划[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1989.

[7] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 1999.

[8] 李希灿. 动态平差灰色预测优化模型[J]. 测绘工程, 1999, 8 (1): 34~ 35.

[9] 武汉测绘科技大学测量平差教研室. 测量平差基础[M]. 北京: 测绘出版社, 1996.

[10] 李云峰, 田春声. 灰色 GM (1, 1) 模型研究关中灌区地下水位变化规律[J]. 西安地质学院学报, 1993, 15(4): 56.

[11] 苏金明, 阮沈勇. MATLAB6. 1 实用指南[M]. 北京: 电子工业出版社, 2002.

[12] 吴琳, 李天文. 基于 GIS 的沉降监测数据分析及其三维模拟[J]. 地球科学与环境学报, 2004, 26(2): 67~ 68.

Study of the application of grey forecast model
in settlement forecast of high buildings

LI Ri yun, WANG Li, ZHANG Shuang cheng

(School of Geological Engineering and Surveying Engineering, Chang' an University, Xi' an 710054, China)

Abstract This paper discusses the fundamental contents and the modelling procedures of one order gray forecast model GM (1, 1). The GM(1, 1) model was successfully used in settlement forecast of high building settlement monitoring. The main program Greymodel (GM) is developed with MATLAB language, and it can be convenient to be used in practice. The exam ple proves that the gray forecasting model GM(1, 1) has high usable value in settlement forecast of high building.

Key words: Grey forecast model; GM(1, 1) model; settlement forecast; MATLAB

[英文审定: 马智民]

本刊重要启事

经报请国家科技部、国家新闻出版总署批准,《西安工程学院学报》《长安大学学报(地球科学版)》从 2004 年起更名为《地球科学与环境学报》。

本刊名称变化及对应卷号如下:

1979~ 1997 年	西安地质学院学报	1~ 19 卷
1998~ 2002 年	西安工程学院学报	20~ 24 卷
2003 年	长安大学学报(地球科学版)	25 卷
2004 年~	地球科学与环境学报	26 卷~

本刊编辑部衷心感谢广大作者和读者曾给予本刊的关心与支持, 并真诚欢迎从事地球科学与环境科学的科技人员继续赐稿或订阅本刊(邮发代号 52- 280)。

本刊地址: 西安市雁塔路南段 126 号长安大学雁塔校区 邮政编码: 710054

电 话: 029- 82339978 E mail: dkyhxb@chd. edu. cn

《地球科学与环境学报》编辑部