

基于可靠度理论的黄土高边坡优化设计

叶万军¹, 折学森¹, 陈志新², 宋建华³, 邵铁全²

(1. 长安大学 特殊地区公路工程实验室, 陕西 西安 710064; 2. 长安大学 地质工程与
测绘工程学院, 陕西 西安 710054; 3. 新疆水利水电科学研究院, 新疆 乌鲁木齐 830049)

[摘要] 对黄土高边坡进行可靠性分析, 应用数学原理和优化原理, 建立了黄土高边坡的优化模型, 对铜黄一级公路黄土高边坡进行分析验证。结果表明, 该方法计算的结果与实际较接近, 应用中易操作。

[关键词] 黄土高边坡; 可靠度; 优化设计

[中图分类号] P642.2; U416.14 [文献标识码] A [文章编号] 1672-6561(2005)02-0082-04

[作者简介] 叶万军(1976-), 男, 陕西丹凤人, 博士研究生, 从事公路岩土工程的研究。

黄土地区黄土高边坡优化设计的基础是边坡的稳定性评价。稳定性分析中, 定性分析法的主观因素太强, 缺乏理论指导; 定量分析法是把土强度参数及外界因素都取为一个定值, 主观性很强。实际上, 边坡体内应力分布不均匀, 在可能所谓的安全边坡中, 还存在一定的破坏概率^[1]。因此, 边坡可靠性正逐步被工程界所接受。

1 可靠度分析方法简介

目前, 边坡可靠性分析的方法主要有: 蒙特卡罗模拟法、可靠指标法、统计矩法和随机有限元法。蒙特卡罗模拟法需要预知各基本变量的分布形式和参数; 可靠指标法对非线性极限状态函数将会引起较大的误差; 统计矩法相对精度较低; 随机有限元法运算量大, 每一次只能计入某一指定变量的变异, 而且公式十分繁复。笔者推荐用优化法与Fiessler迭代法计算可靠度^[2,3]。

1.1 优化法

可靠度指标 β 是标准正态坐标原点到极限状态面的最短距离。令 $\beta = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 目标函数可写成

$$\beta = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad (1)$$

因此, β 是在约束条件 $Z = g(x) = g(x_1, x_2, \dots,$

$x_n) = 0$ 下的条件极小值。

计算式(1)对 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} 导数, 将 x_n 视为 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} 的函数, 由此可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_1} &= g_1 + g_n \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} &= g_2 + g_n \frac{\partial x_n}{\partial x_2} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}} &= g_{n-1} + g_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: g_1, g_2, \dots, g_n 为 $g(\ast)$ 的偏导数。

这时所研究的问题变为一般求 $(n-1)$ 元函数(无条件)极值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= f_1 + f_n \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= f_2 + f_n \frac{\partial x_n}{\partial x_2} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} &= f_{n-1} + f_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: f_1, f_2, \dots, f_n 为 $f(\ast)$ 的偏导数。于是可得方程组

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} f_1 & f_n \\ g_1 & g_n \end{vmatrix} &= 0 \\ \begin{vmatrix} f_2 & f_n \\ g_2 & g_n \end{vmatrix} &= 0 \\ &\vdots \\ \begin{vmatrix} f_{n-1} & f_n \\ g_{n-1} & g_n \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

从而可得验算点 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, 而可靠度指标 β

值计算为

$$\beta = \min \beta_0 = [(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 + \dots + (x_n^*)^2]^{1/2} \quad (5)$$

1.2 Fiessler 迭代法

一个标准化变量具有均值为 0 和标准差为 1 的特性, 这意味标准空间的坐标原点即为标准化变量的平均值点。此时, 状态方程可为

$$Z = g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6)$$

因此在点 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$

$$Z = g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \Big|_* = 0$$

可简化为

$$Z = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \Big|_* = 0 \quad (7)$$

因为标准化变量的均值为 0, 标准差为 1, 故

$$u_z \approx \sum_{i=1}^n (u_{xi} - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \Big|_{p^*} = - \sum_{i=1}^n x_i^* \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \Big|_* \quad (8)$$

$$\sigma_z \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \Big|_* \quad \sigma_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \Big|_* \quad (9)$$

由式(8)式(9)可得可靠指标 β

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \Big|_*}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \Big|_*} \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \Big|_* [-(x_i^* - \alpha_i \beta)] = 0 \quad (11)$$

则对于所有 i 值, 用标准化变量表示的解为

$$x_i^* = -\alpha_i \beta \quad (12)$$

可得 β 值

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^*)^2} \quad (13)$$

1.3 黄土高边坡可靠度计算

采用瑞典条分法建立极限状态方程

$$\tan \varphi' \sum \gamma_i V_i \cos \alpha_i + C' \sum l_i - \sum \gamma_i V_i \sin \alpha_i = 0 \quad (14)$$

式中: V 为滑动土体的体积。在这个极限状态方程中, 有 3 个随机变量 C' , γ , $\tan \varphi'$, 土坡的几何参数可以作为确定性数值来处理。令 $\tan \varphi' = x_1$, $\gamma = x_2$, $C' = x_3$, $\sum V_i \cos \alpha_i = A$, $\sum V_i \sin \alpha_i = B$, $\sum l_i = D$ 。由于黄土高边坡的破坏方式主要是

滑塌型, 破坏面为上陡下缓的“L”型, 可用抛物线近似, 设滑裂面方程为 $y = px^2$, 则

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{2px}{\sqrt{1 + (2px)^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2px)^2}}$$

1.3.1 优化法

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \quad (15)$$

$$g(x) = (x_1 \sigma_{x_1} + \mu_{x_1})(x_2 \sigma_{x_2} + \mu_{x_2})A + (x_3 \sigma_{x_3} + \mu_{x_3})D - (x_2 \sigma_{x_2} + \mu_{x_2})B = 0 \quad (16)$$

可得方程组

$$\left. \begin{aligned} x_2 \sigma_{x_3} D - x_3 \sigma_{x_2} (x_1 \sigma_{x_1} + \mu_{x_1}) A + x_3 \sigma_{x_2} B &= 0 \\ x_1 \sigma_{x_3} D - x_3 \sigma_{x_1} (x_2 \sigma_{x_2} + \mu_{x_2}) A &= 0 \\ (x_1 \sigma_{x_1} + \mu_{x_1})(x_2 \sigma_{x_2} + \mu_{x_2}) A + (x_3 \sigma_{x_3} + \mu_{x_3}) D - (x_2 \sigma_{x_2} + \mu_{x_2}) B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

解方程组, 可求得可靠度指标

$$\beta = [(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2]^{1/2} \quad (18)$$

然后代入公式 $pf = 1 - \Phi(\beta)$ 求出破坏概率 pf 。

1.3.2 Fiessler 法

设 $x_1 = x_2 = x_3 = \beta(0) = 0$ 并代入式(16)求 $g(x)$ 值。 σ_z 计算

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_*^2} = \sqrt{[\sigma_{x_1} (x_2 \sigma_{x_2} + \mu_{x_2}) A]^2 + [\sigma_{x_2} (x_1 \sigma_{x_1} + \mu_{x_1}) A - \sigma_{x_2}]^2 + (\sigma_{x_3} D)^2} \quad (19)$$

这样可得到新的 x 值

$$x = - \left(\frac{\partial g / \partial x_i}{\sigma_z} \right)_* \left[\beta(0) + \frac{g(x)}{\sigma_z} \right] \quad (20)$$

将式(20)代入式(13), 便可求得新的 $\beta(1)$ 值

$$\beta(1) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2} = \left[\beta(0) + \frac{g(x)}{\sigma_z} \right] \quad (21)$$

计算新的 x 值, 重新进行迭代计算, 直到前后 2 次计算的 β 值之差满足一定精度时为止。然后代入公式 $pf = 1 - \Phi(\beta)$ 求出破坏概率 pf 。

2 黄土高边坡优化设计

2.1 优化模型的建立

2.1.1 目标函数

根据黄土高边坡的特点, 其工程造价由施工造

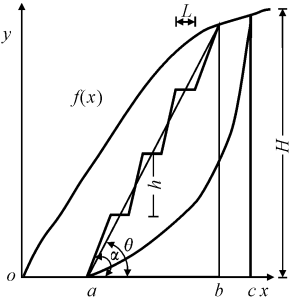


图 1 黄土高边坡优化模型

Fig. 1 Optimization model for high loess slope

价和工程失效时需要付出的代价组成。目标是在安全可靠的条件下,边坡工程造价最小。假设边坡为 n 级边坡(图 1),每级坡高皆为 h ,单级坡角为 α ,总坡角为 θ ,平台宽皆为 L ,总坡高为 H ,最危险滑弧长度 l ,无形损失系数 λ ,据工程等级和经验取值。土方量单价为 A ,滑塌后的坡面维护费

用单价为 B ,坡面恢复、维护系数 τ ,据工程要求确定。破坏概率为 pf ,自然坡面方程为 $f(x)$ 。建立黄土高边坡设计的目标函数

$$\min f = (\int_0^b f(x) dx - \Delta V_1) A + \lambda \times pf (\Delta V_1 + \int_b^c f(x) dx - \int_0^c px^2 dx) \times A + \lambda \times pf \times \int_a^c \sqrt{1 + (2px)^2} dx \times B \quad (22)$$

式中: ΔV_1 为设计坡面下的土体体积。

2.1.2 约束条件

(1) 安全系数的约束。边坡工程的优化,首先要保证工程的安全性。不同的工程规模与工程等级要求不同的安全储备。笔者以铜黄公路黄土高边坡为例,根据《公路路基设计规范》(JTJ013 95),高速公路、一级公路高边坡设计时应进行稳定性计算,当采用圆弧滑动面计算时,稳定系数 $F_s \geq 1.25$ 。

(2) 安全可靠的约束。建立目标函数时,破坏概率也是主要的设计变量,对于边坡设计可接受的破坏概率的限值^[6,7],还未形成统一的标准,一般采用工程经验方法进行确定。对于边坡工程可靠性设计,还处于起步阶段,缺乏实际经验。笔者仅对边坡优化设计的方法做一般性探索。文献[4]对于挖方台阶边坡设计可接受的破坏概率的限值,破坏概率为 $0 \leq pf \leq 0.1$ 。

(3) 单级坡高的约束。坡面分级的确定,据文献[4]提出的单级坡高 H_i 的计算

$$H_i = \frac{c}{0.11k\gamma}$$

根据铜黄公路边坡实测的力学参数,估算出最大单级坡高 $h \leq 18$ m。

(4) 边坡总坡角、单级坡角的约束。边坡总坡

角、单级坡角据经验来确定。据陕北及铜黄公路调查^[9],可给出铜黄公路边坡单级坡比、总坡比范围为 $40^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ, 30^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ 。

(5) 平台宽的约束。为了研究平台的宽窄对坡体稳定性的影响,采用二维有限元对铜黄公路高边坡不同坡高和不同平台进行了模拟^[4],给出了边坡平台的取值范围: $30 \text{ m} < H \leq 40 \text{ m}, 3 \text{ m} \leq L \leq 5 \text{ m}; 40 \text{ m} < H \leq 60 \text{ m}, 5 \text{ m} \leq L \leq 8 \text{ m}; 60 \text{ m} < H \leq 80 \text{ m}, 8 \text{ m} \leq L \leq 12 \text{ m}$,其中, H 为坡高; L 为平台宽。

2.2 优化过程

用于黄土高边坡优化设计的计算程序如图 2,其中 JBSJ.m 块为坡面方程、物理力学参数、统计参数、坡高等基本数据的输入; SL.m 块为搜索最危险滑面子程序; KKD.m 块为计算边坡可靠度子程序; YH.m 块为优化计算子程序; θ 为总坡角。

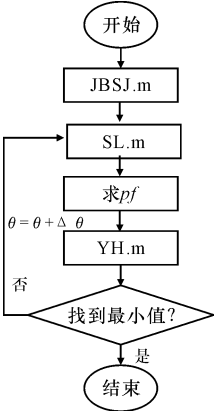


图 2 程序流程图

Fig. 2 Process to the optimization design

3 工程实例

为了检验提出方法的正确性,选取铜黄公路沿线一处高 88 m 典型黄土高边坡 K105+790~950 为优化对象。计算参数如表 1,计算结果如图 3,图 4。

表 1 K105+790~950 高边坡计算参数统计特征

Table 1 Physical mechanical parameters and their statistics of K105+790~950 loess high slope

项目	$\tan \varphi$	$\gamma / (\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	c / kPa
均值 μ	0.456 7	17.3	78.75
方差	0.112 9	0.176 4	39.312 9
标准差 σ	0.336 0	0.42	12.556 4

从计算结果可以看出,当坡角增大时,挖土方量减少,施工造价降低,但边坡失效概率增大,将要支付的失效代价即风险代价增大。因此,盲目的增大或降低坡角,都不会提高边坡工程质量。

优化的结果为:总坡比:1:1.26,平台宽 12~15 m,单级坡比 1:0.57~1:0.71。

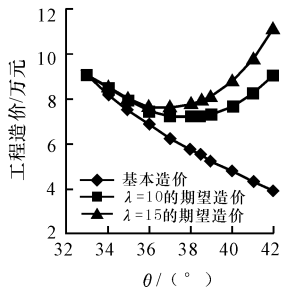


图 3 各级平台相等时优化结果
Fig.3 Result for the case of the same size of the platforms

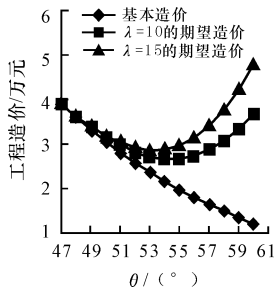


图 4 设置大平台时优化结果
Fig.4 Result for the case of the different size of the platforms

该高边坡的实际情况为: 开始按 5 级方坡, 下面 3 级 1 : 0. 5, 上部为 1 : 0. 75, 平台宽 3 m 来设计, 后发生了滑塌, 因此重新修改方案, 总坡比达 1 : 1. 25, 单级坡比约 1 : 0. 6, 平台加大到 10 ~ 12 m, 稳定系数为 1. 28, 保证了公路的安全。从该边坡施工完成到现在已有 4 年, 坡体保持了稳定。

实际情况与得出的结果比较后可以看出, 优化结果与实际情况基本吻合。差异由几方面原因引起:

- (1) 坡面形状拟合的误差。
- (2) 实际岩土地质性质的变异。
- (3) 受交通道路等因素的制约。
- (4) 实际工程的布置。

4 结论

(1) 将可靠度计算的优化法和 Fiessler 提出的可靠度计算迭代法用于黄土高边坡可靠度计算, 该方法与标准化变量一起使用, 比 JC 法更为方便。

(2) 建立了公路路堑黄土高边坡的优化模型。编制优化程序, 该程序包括最危险滑面的搜索、可靠度计算、优化。

(3) 结合铜黄一级公路黄土高边坡, 采用笔者提出的优化方法进行验证, 与实际情况比较, 该方法计算的结果与实际较接近, 说明提出的优化方法有一定的实用价值, 可供设计人员参考使用。

[参 考 文 献]

[1] 彭小云, 高德彬, 毕选生, 等. 高陡边坡稳定性的概率分析[J]. 长安大学学报(地球科学版), 2003, 25(3): 67 ~ 70.
[2] 祝玉学. 边坡可靠性分析[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1993.
[3] 高大钊. 土力学可靠性分析原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989.
[4] 周欣华, 党进谦, 李靖. 黄土边坡及其稳定分析图简介[J]. 西北农业大学学报, 1999, 27(2): 101 ~ 104.
[5] 赵之胜, 折学森, 陈志新. 铜黄公路黄土高边坡性状分析与治理对策研究[D]. 西安: 陕西省交通厅, 2002.
[6] 贾厚华, 贺怀建. 边坡稳定性模糊随机可靠度分析[J]. 岩土力学, 2003, 24(4): 657 ~ 660.
[7] 周育峰. 边坡稳定性的可靠度分析[J]. 公路 2003 (9): 80 ~ 83.

Optional design of high loess slope in highway based on reliability method

YE Wan jun¹, SHE Xue sen¹, CHEN Zhi xin², SONG Jian hua³, SHAO Tie quan²

(1. Key Laboratory for Special Area Highway Engineering of Ministry of Education, Chang' an University, Xi' an 710064, China; 2. School of Geological Engineering and Surveying Engineering, Chang' an University, Xi' an 710054, China; 3. Xinjiang Institute of Water Resources and Hydropower Research, Urumqui 830049, China)

Abstract: The loess slope was analyzed with reliability method, an optimized model for designing high loess slope was established, and the high loess slope of Tong Hong highway was used to verify this model. The results indicate that the concept of this model is precise, its physical meaning is confirm, and people who do designing work may take this model as an reference.

Key words: high loess slope; reliability; optimization designation

[英文审定: 苏生瑞]