第 36 卷　第 2 期
2014 年 6 月

地 球 科 学 与 环 境 学 报
Journal of Earth Sciences and Environment

Vol. 36　No. 2
June 2014

文章编号:1672-6561(2014)02-0033-05

投稿网址http://jese.chd.edu.cn/

N 维阵研究及其地学应用

申　维

(中国地质大学(北京)地质过程与矿产资源国家重点实验室,北京　100083)

摘　要:提出了 N 维阵的概念和常用的几种定义和运算,包括 N 维阵的加减、方括号乘法和 Hadamard 积,给出了其性质及相应的说明;指出立体阵是 N 维阵的一个特例。N 维阵方法的优势在于对多维数据表示更加简洁,理论分析较方便。最后,通过江绍拼合带中西段 Cu-Zn-Ab-Ag-Sn-As 元素组合异常研究和浙西地区铜多金属矿成矿预测,说明了 N 维阵在实际问题应用中的方法及步骤。N 维阵在处理地学多维数据方面有着重要的应用前景。

关键词:数学地质;N 维阵;方括号乘法;Hadamard 积;立体阵;元素组合;成矿预测

中图分类号:P628;O189.12　　　**文献标志码:**A

Study of *N*-dimensional Matrices and Its Application in Geology

SHEN Wei

(State Key Laboratory of Geological Processes and Mineral Resources, China University of Geosciences, Beijing 100083, China)

Abstract: A new basic concept of N-dimensional matrices was presented by the cubic matrices conception. The definition and arithmetic (including add-subtract, bracket multiplication and Hadamard product) of N-dimensional matrices were studied and proved. The cubic matrices was a special case of N-dimensional matrices. The multi-dimensional data were expressed more brief and facility in theoretical analysis by the method of N-dimensional matrices. The geological examples, which included the research on Cu-Zn-Ab-Ag-Sn-As element combination anomalies in the middle-west of Jiangshan-Shaoxing matching belt and the metallogenic prediction of copper polymetallic ore in the western of Zhejiang, were given to illustrate the method and procedure of N-dimensional matrices in geological application. The method of N-dimensional matrices is considered as a good tool in exploration and forecast.

Key words: mathematical geology; N-dimensional matrices; bracket multiplication; Hadamard product; cubic matrices; element combination; metallogenic prediction

0　引　言

在地学研究中,经常遇到多维数据,例如对于许多复杂的地质现象,要考虑全局范围各个方向的平稳性,即区别各向同性或各向异性分布规律,同时它们包含多个因变量和层次,每个因变量和层次具有不同的统计特征,必须用多变量与多个参数(即多维数据信息)来描述,才能全面刻画其特征。在矿床预测研究中经常遇到以下难题:矿质运移及其空间展布具有多维性;矿床演变与控矿构造具有多层次、多阶段性等[1-9]。目前,对于地质模型研究常用方法有非线性逻辑回归模型、多维对数线性模型、多维标度法和数量化理论等[10-11],但这些方法主要用于处理二维数据,因此,提出和研究处理多维数据的新方法是非常必要的[12]。N 维阵概念的提出和应用,为研究多维数据提供了一个有力的工具。笔者提出了 N 维阵的

收稿日期:2013-08-19
基金项目:国家自然科学基金项目(41172302,40672196)
作者简介:申　维(1957-),男,湖北武汉人,教授,博士研究生导师,理学博士,E-mail:shenwei@cugb.edu.cn。

概念、常用的几种定义和运算，包括 N 维阵的加减、方括号乘法和 Hadamard 积，同时研究了其性质，认为 N 维阵在处理地学多维数据中有重要应用前景。

1 N 维阵的定义

定义 1.1 称 $r_1\times r_2\times\cdots\times r_n$ 的 n 维数组 $\boldsymbol{S}$ 为 N 维阵，$\boldsymbol{S}=(s_{i_1i_2\cdots i_n})$，$1\leqslant i_1\leqslant r_1$，$1\leqslant i_2\leqslant r_2$，$\cdots$，$1\leqslant i_n\leqslant r_n$。

例如，当 $n=4$ 时，i_4、i_3 分别表示横坐标与纵坐标(或经纬度)，i_2 表示高度(或高程)，$s_{i_1i_2i_3i_4}$ 表示第 i_1 种地球化学元素(如金)在三维坐标(i_2,i_3,i_4)处的数值，$i_1=1,2,\cdots,r_1$。

定义 1.2 设 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 均为 $r_1\times r_2\times\cdots\times r_n$ 的 N 维阵，定义 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 之和(差)为 $\boldsymbol{S}\pm\boldsymbol{T}=(s_{i_1i_2\cdots i_n}\pm t_{i_1i_2\cdots i_n})$，$1\leqslant i_1\leqslant r_1$，$1\leqslant i_2\leqslant r_2$，$\cdots$，$1\leqslant i_n\leqslant r_n$。

例如，当 $n=4$ 时，$s_{i_1i_2i_3i_4}+t_{i_1i_2i_3i_4}$ 表示两类地质变量数据(如物探数据和化探数据)$s_{i_1i_2i_3i_4}$ 与 $t_{i_1i_2i_3i_4}$ 在三维坐标(i_2,i_3,i_4)处的数值之和，$i_1=1,2,\cdots,r_1$。

定义 1.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times r_1$ 阶矩阵，$\boldsymbol{S}$ 为 $r_1\times r_2\times\cdots\times r_n$ 的 N 维阵，定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的方括号乘法 $\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{S}]$为一个 $m\times r_2\times\cdots\times r_n$ 的 N 维阵，即 $t_{si_2i_3\cdots i_n}=\sum\limits_{k=1}^{r_1}a_{sk}s_{ki_2i_3\cdots i_n}$，$1\leqslant s\leqslant m$，$1\leqslant i_2\leqslant r_2$，$1\leqslant i_3\leqslant r_3$，$\cdots$，$1\leqslant i_n\leqslant r_n$。

特别地，当 $n=4$ 时，当 $\boldsymbol{A}$ 等于 $\boldsymbol{a}$，为一个 r_1 维向量时，$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{S}]$为 $r_2\times r_3\times r_4$ 的三维阵，即 $t_{i_2i_3i_4}=\sum\limits_{k=1}^{r_1}a_ks_{ki_2i_3i_4}$，$1\leqslant i_2\leqslant r_2$，$1\leqslant i_3\leqslant r_3$，$1\leqslant i_4\leqslant r_4$。例如，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_{r_1})$，其中，$a_k$ 是权数，$\sum\limits_{k=1}^{r_1}a_k=1$，$t_{i_2i_3i_4}$ 表示 r_1 种地球化学元素(如金)$s_{i_1i_2i_3i_4}$ 在三维坐标(i_2,i_3,i_4)处的加权数值之和，$i_1=1,2,\cdots,r_1$。

方括号乘法的基本性质为

$$[\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}][\boldsymbol{S}]=[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{S}]\pm[\boldsymbol{B}][\boldsymbol{S}] \tag{1}$$

$$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{S}\pm\boldsymbol{T}]=[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{S}]\pm[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{T}] \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times r_1$ 阶矩阵。

定义 1.4 设 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 均为 $r_1\times r_2\times\cdots\times r_n$ 的 N 维阵，定义 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 的 Hadamard 积 $\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T}=(s_{i_1i_2\cdots i_n}\cdot t_{i_1i_2\cdots i_n})$，$1\leqslant i_1\leqslant r_1$，$1\leqslant i_2\leqslant r_2$，$\cdots$，$1\leqslant i_n\leqslant r_n$。

Hadamard 积的基本性质为

$$\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{S} \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T})\circ\boldsymbol{U}=\boldsymbol{S}\circ(\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{U}) \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})\circ U=\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{U}+\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{U} \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{U}$ 均为 $r_1\times r_2\times\cdots\times r_n$ 的 N 维阵。

定义 1.5 设 k 为一个常数，$\boldsymbol{S}$ 为 $r_1\times r_2\times\cdots\times r_n$ 的 N 维阵，定义 $\boldsymbol{T}=k\boldsymbol{S}=(ks_{i_1i_2\cdots i_n})$，为 $r_1\times r_2\times\cdots\times r_n$ 的 N 维阵，$1\leqslant i_1\leqslant r_1$，$1\leqslant i_2\leqslant r_2$，$\cdots$，$1\leqslant i_n\leqslant r_n$。

2 立体阵的定义

立体阵的概念及运算最早由 Bates 等在 1980 年提出[13]，1983 年 Tsai 在博士论文中对其进行了初步整理，1989 年中国学者韦博成在 Tsai 博士论文的基础上进行了系统总结和扩充[14]。立体阵在非线性模型的非线性强度度量中有广泛的应用，在估计非线性模型的固有曲率和参数效应曲率时，起着关键的作用，在非线性回归分析、搏弈论与经济学等中都有广泛的应用前景。实际上，立体阵是 N 维阵的一个特例($n=3$)。

定义 2.1 定义 $n\times p\times q$ 的三维数组 $\boldsymbol{X}=(x_{kij})$为立体阵[13]，$1\leqslant k\leqslant n$，$1\leqslant i\leqslant p$，$1\leqslant j\leqslant q$。其表达式为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\\\vdots\\\boldsymbol{X}_n\end{pmatrix} \tag{6}$$

其中 $$\boldsymbol{X}_k=\begin{pmatrix}x_{k11} & \cdots & x_{k1q}\\\vdots & & \vdots\\x_{kp1} & \cdots & x_{kpq}\end{pmatrix}$$

例如，j、i 分别表示横坐标与纵坐标(或经纬度)，x_{kij} 表示第 k 种地球化学元素(如金)在坐标(i,j)处的数值，$k=1,2,\cdots,n$。

定义 2.2 设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 均为 $n\times p\times q$ 立体阵，定义 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 之和(差)为 $\boldsymbol{X}\pm\boldsymbol{Y}=(x_{kij}\pm y_{kij})$[15]，$1\leqslant k\leqslant n$，$1\leqslant i\leqslant p$，$1\leqslant j\leqslant q$。

例如，$x_{kij}+y_{kij}$ 表示两类地质变量数据(如物探数据和化探数据)x_{kij} 与 y_{kij} 在坐标(i,j)处的数值之和，$k=1,2,\cdots,n$。

定义 2.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为 $n\times p\times q$ 立体阵，定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 的方括号乘法 $\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{X}]$[15]，为一个 $m\times p\times q$ 的立体阵，即 $y_{sij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{sk}x_{kij}$，$1\leqslant s\leqslant m$，$1\leqslant i\leqslant p$，$1\leqslant j\leqslant q$。

特别地，当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}$，为一个 n 维向量时，$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{X}]$为 $p\times q$ 阶矩阵，即 $y_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_{kij}$，$1\leqslant i\leqslant p$，$1\leqslant j\leqslant q$。例如，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 a_k 是权数，$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=1$，$y_{ij}$ 表示 n 种地球化学元素(x_{kij})在坐标

(i,j)处的加权数值之和，$k=1,2,\cdots,n,1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant q$。

方括号乘法的基本性质(立体阵)

$$[\boldsymbol{C}\pm\boldsymbol{D}][\boldsymbol{X}]=[\boldsymbol{C}][\boldsymbol{X}]\pm[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{X}] \tag{7}$$

$$[\boldsymbol{C}][\boldsymbol{X}\pm\boldsymbol{Y}]=[\boldsymbol{C}][\boldsymbol{X}]\pm[\boldsymbol{C}][\boldsymbol{Y}] \tag{8}$$

式中：$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 为 2 个 $n\times p\times q$ 立体阵；$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵。

定义 2.4　设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 均为 $n\times p\times q$ 立体阵，定义 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的 Hadamard 积 $\boldsymbol{X}\circ\boldsymbol{Y}=(x_{kij}y_{kij})$ [16]，$1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant q$。

Hadamard 积的基本性质(立体阵)

$$\boldsymbol{X}\circ\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}\circ\boldsymbol{X} \tag{9}$$

$$(\boldsymbol{X}\circ\boldsymbol{Y})\circ\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}\circ(\boldsymbol{Y}\circ\boldsymbol{Z}) \tag{10}$$

$$(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\circ\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}\circ\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Y}\circ\boldsymbol{Z} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{Z}$ 为 $n\times p\times q$ 立体阵。

定义 2.5　设 k 为一个常数，$\boldsymbol{X}$ 为 $n\times p\times q$ 立体阵，定义 $\boldsymbol{Y}=k\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}k\boldsymbol{X}_1\\k\boldsymbol{X}_2\\\vdots\\k\boldsymbol{X}_n\end{pmatrix}$ 为 $n\times p\times q$ 立体阵。

3　应用实例

3.1　江绍拼合带中西段 Cu-Zn-Ab-Ag-Sn-As 元素组合异常研究

江绍拼合带中西段 1∶200 000 地球化学元素 Cu、Zn、Ab、Ag、Sn 和 As 的数据(每个元素的数据量为 5 544 个)可以组成 $6\times56\times99$ 的三维数组 $\boldsymbol{X}=(x_{kij})$，即立体阵，$1\leqslant k\leqslant6,1\leqslant i\leqslant56,1\leqslant j\leqslant99$。通过成矿及伴生元素共生组合规律研究，确定相关性较强的元素组合。以相关性较强元素的地球化学观测数据为基础，计算多元素的累加指数值，定量表示和研究地球化学元素组合异常及其空间分布规律。最常用的方法是通过多元相关分析方法，确定成矿元素组合，然后用元素累加指数制作元素组合异常等值线图(图 1)。

累加指数计算公式为

$$(z_{ij})=\sum_{k=1}^{6}\frac{x_{kij}}{\sum\limits_{i=1}^{56}\sum\limits_{j=1}^{99}x_{kij}/(56\times99)}=[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{X}] \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{56}\sum\limits_{j=1}^{99}x_{1ij}/(56\times99)\\\sum\limits_{i=1}^{56}\sum\limits_{j=1}^{99}x_{2ij}/(56\times99)\\\vdots\\\sum\limits_{i=1}^{56}\sum\limits_{j=1}^{99}x_{6ij}/(56\times99)\end{pmatrix}$，$1\leqslant i\leqslant56,1\leqslant j\leqslant99$。

3.2　浙西地区铜多金属矿成矿预测

根据浙西地区 1∶200 000 地质图和相关矿种分布图，在对区域地质背景深入分析的基础上，针对

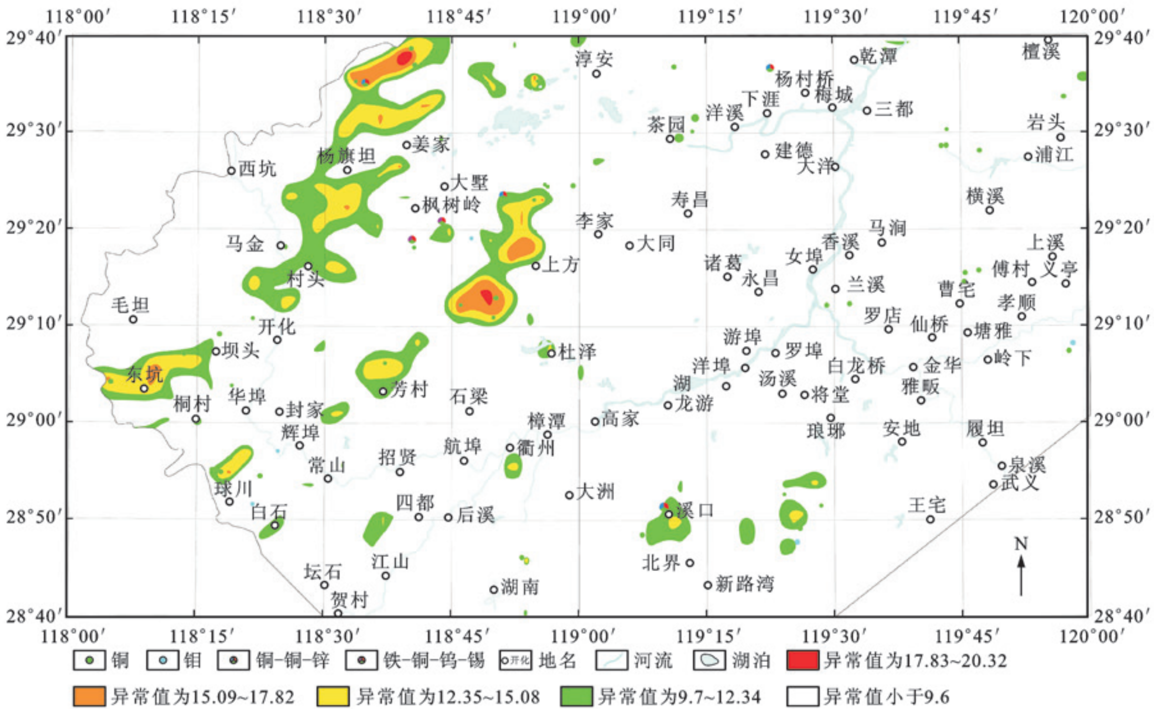

图 1　Cu-Zn-Pb-Ag-Sn-As 元素组合异常等值线

Fig. 1　Contour Map of Cu-Zn-Ab-Ag-Sn-As Element Combination Anomalies

需要预测矿种与地质背景的关系，提取以下信息作为地质预测变量（图层）：有利地层面积百分比（$\boldsymbol{X}_1$）；地层组合熵（$\boldsymbol{X}_2$）；同熔型及重熔型花岗岩存在与否（$\boldsymbol{X}_3$）；燕山期岩体存在与否（$\boldsymbol{X}_4$）；断裂等密度（$\boldsymbol{X}_5$）；断裂交点数（$\boldsymbol{X}_6$）；银矿点数（$\boldsymbol{X}_7$）；金矿点数（$\boldsymbol{X}_8$）；铅锌矿点数（$\boldsymbol{X}_9$）；铁矿点数（$\boldsymbol{X}_{10}$）；成矿元素簇团因子异常得分（$\boldsymbol{X}_{11}$）。

将研究区划分为 5 km×5 km 的网格单元，共 1 755 个单元，每个单元可以看作平面上的一个点，计算 11 个地质预测变量（图层）的每个单元成矿有利度（即铜多金属矿发生的条件概率），其中安徽、江西单元部分（共 301 个）的有利度设为 0。这样，11 个地质预测变量（图层）$\boldsymbol{X}_k$ 的成矿有利度可以组成 11×39×45 的三维数组 $\boldsymbol{X}=(x_{kij})$，即立体阵，$1\leqslant k\leqslant 11$，$1\leqslant i\leqslant 39$，$1\leqslant j\leqslant 45$。其中，i、j 表示单元的坐标。将 11 个地质预测变量（图层）的成矿有利度加权平均，得到浙西地区铜多金属矿成矿有利度等值线图（图 2）。

成矿有利度加权平均值为

$$(y_{ij})=\sum_{k=1}^{11}a_k x_{kij}=[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{X}] \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_{11}\end{pmatrix}$，$1\leqslant i\leqslant 39$，$1\leqslant j\leqslant 45$

$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11})=(0.12,0.08,0.05,0.09,0.06,0.01,0.19,0.21,0.01,0.05,0.13)$

式中：a_k 为相应的地质预测变量（图层）权数，$\sum_{k=1}^{11}a_k=1$。

4 结 语

（1）提出了 N 维阵的概念、常用的几种定义和

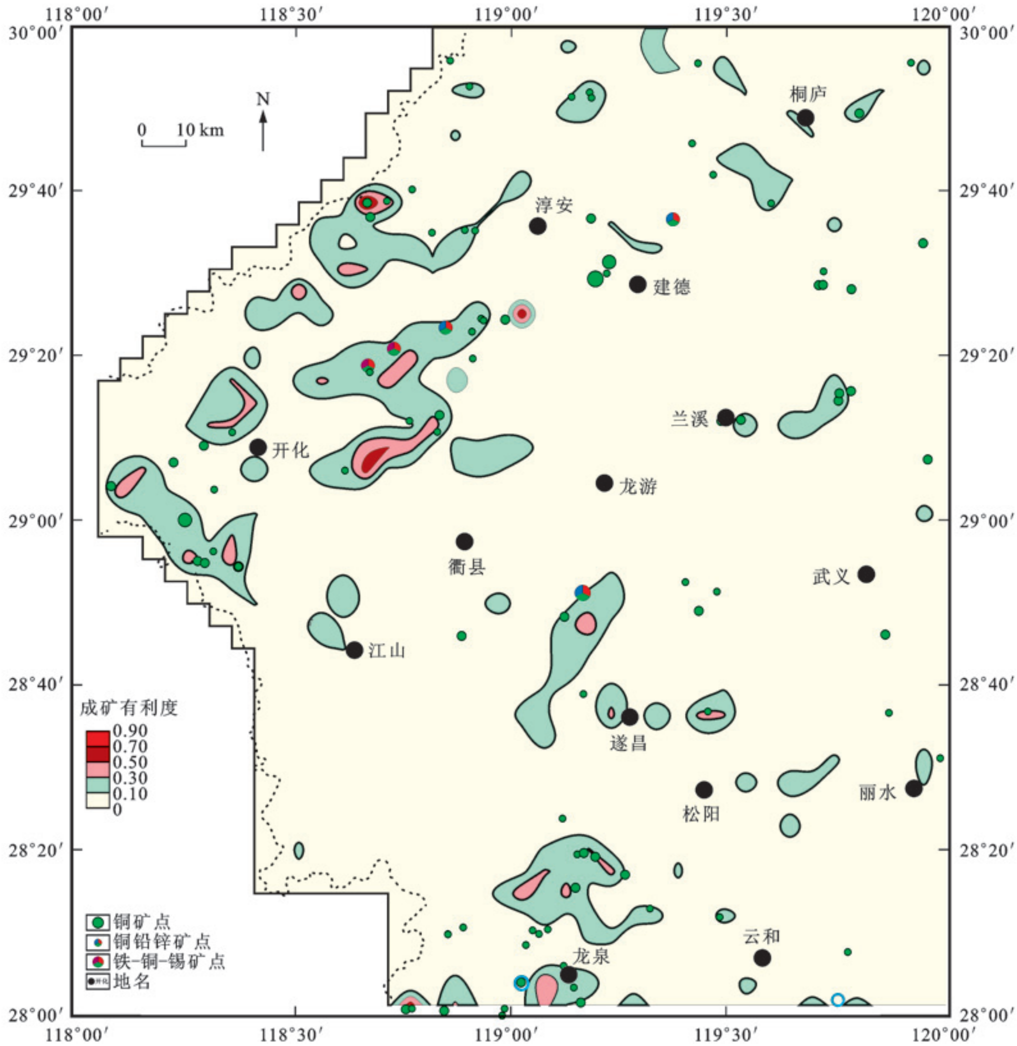

图 2 铜多金属矿成矿有利度等值线

Fig. 2 Contour Map of Ore-forming Favorability of Copper Polymetallic Deposit

运算，包括 N 维阵的加减、方括号乘法和 Hadamard 积，并给出了其性质及相应的说明。

(2)通过江绍拼合带中西段 Cu-Zn-Ab-Ag-Sn-As 元素组合异常研究与浙西地区铜多金属矿成矿预测，说明 N 维阵在实际问题中应用的方法及步骤，认为 N 维阵在处理地学多维数据中有着重要的应用前景。

(3)N 维阵方法的优势在于对多维数据表示与分析更加简洁与方便。N 维阵也是处理空间和时间地质空间多维数据的有效工具。

参 考 文 献：

References：

[1] 赵鹏大.成矿定量预测与深部找矿[J].地学前缘，2007，14(5)：1-10.
ZHAO Peng-da. Quantitative Mineral Prediction and Deep Mineral Exploration[J]. Earth Science Frontiers，2007，14(5)：1-10.

[2] 叶天竺，薛建玲.金属矿床深部找矿中的地质研究[J].中国地质，2007，34(5)：855-869.
YE Tian-zhu，XUE Jian-ling. Geological Study in Search of Metallic Ore Deposits at Depth[J]. Geology in China，2007，34(5)：855-869.

[3] 翟裕生，邓　军，王建平，等.深部找矿研究问题[J].矿床地质，2004，23(2)：142-149.
ZHAI Yu-sheng，DENG Jun，WANG Jian-ping，et al. Researches on Deep Ore Prospecting[J]. Mineral Deposits，2004，23(2)：142-149.

[4] 申　维.分形混沌与矿产预测[M].北京：地质出版社，2002.
SHEN Wei. Fractal and Chaos with Application in Mineral Resource Prediction[M]. Beijing：Geological Publishing House，2002.

[5] SHEN W，ZHAO P D. Multidimensional Self-affine Distribution with Application in Geochemistry[J]. Mathematical Geology，2002，34(2)：109-123.

[6] 申　维，房丛卉，张德会.地球磁极倒转的分形混沌研究[J].地学前缘，2009，16(5)：201-206.
SHEN Wei，FANG Cong-hui，ZHANG De-hui. Fractal and Chaos Research of Geomagnetic Polarity Reversal[J]. Earth Science Frontiers，2009，16(5)：201-206.

[7] 赵鹏大.数字地质与矿产资源评价[J].地质学刊，2012，36(3)：225-228.
ZHAO Peng-da. Digital Geology and Mineral Resources Evaluation[J]. Journal of Geology，2012，36(3)：225-228.

[8] 赵鹏大，李桂范，张金川.基于地质异常理论的页岩气有利区块圈定与定量评价[J].天然气工业，2012，32(6)：1-8.
ZHAO Peng-da，LI Gui-fan，ZHANG Jin-chuan. Shale Gas Favorable Blocks Delineation and Quantitative Evaluation Based on the Geological Anomaly Theory[J]. Natural Gas Industry，2012，32(6)：1-8.

[9] 赵鹏大.找矿理念：从定性到定量[J].地质通报，2011，30(5)：625-629.
ZHAO Peng-da. Prospecting Idea：From Qualification to Quantification[J]. Geological Bulletin of China，2011，30(5)：625-629.

[10] 王世称，陈永良，夏立显.综合信息矿产预测理论与方法[M].北京：科学出版社，2000.
WANG Shi-cheng，CHEN Yong-liang，XIA Li-xian. Theory and Method of Synthetic Information Mineral Resources Prognosis[M]. Beijing：Science Press，2000.

[11] 王世称.综合信息矿产预测理论与方法体系新进展[J].地质通报，2010，29(10)：1399-1403.
WANG Shi-cheng. The New Development of Theory and Method of Synthetic Information Mineral Resources Prognosis[J]. Geological Bulletin of China，2010，29(10)：1399-1403.

[12] 申　维.深部找矿非线性定量理论与技术方法研究进展综述[J].地学前缘，2010，17(5)：278-288.
SHEN Wei. Progress in Nonlinear Quantitative Theory，Technology and Methods of Deep Exploration[J]. Earth Science Frontiers，2010，17(5)：278-288.

[13] BATES D M，WATTS D G. Relative Curvature Measures of Nonlinearity[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B：Methodological，1980，42(1)：1-25.

[14] 韦博成.近代非线性回归分析[M].南京：东南大学出版社，1989.
WEI Bo-cheng. Analysis of Modern Nonlinear Regression[M]. Nanjing：Southeast University Press，1989.

[15] 王新洲.非线性模型参数估计理论与应用[M].武汉：武汉大学出版社，2002.
WANG Xin-zhou. Theory and Application of Nonlinear Models Parameter Estimation[M]. Wuhan：Wuhan University Press，2002.

[16] 倪国熙.常用的矩阵理论和方法[M].上海：上海科学技术出版社，1984.
NI Guo-xi. Theory and Method of Common Matrix[M]. Shanghai：Shanghai Science and Technology Press，1984.