

土压力滑楔理论的统一解

翟越¹, 林永亮¹, 范文^{1,2}, 俞茂宏²

(1. 长安大学 地质工程与测绘工程学院, 陕西 西安 710054; 2. 西安交通大学 建筑工程与力学学院, 陕西 西安 710049)

[摘要] 基于滑楔理论计算土压力的基本原理, 运用考虑中间主应力效应的统一强度理论, 对传统的土压力公式不能反映土体材料强度的中间主应力效应的公式进行了改进, 推导了基于滑楔理论的土压力统一解公式, Coulomb 和 Rankine 土压力公式为其特例。通过变换统一强度参数, 可获得一系列的解。在工程运用中可根据土质和工程的实际情况, 适当选择统一强度参数和应力状态来确定土压力的大小。

[关键词] 统一强度理论; 中间主应力; 土压力; 统一解

[中图分类号] TU432 [文献标识码] A [文章编号] 1672-6561(2004)01-0024-05

[作者简介] 翟越(1975—), 男, 陕西西安人, 硕士研究生, 现从事地质工程教学与科研工作。

在大量的深基坑开挖、填土挡墙、地铁隧道和地下空间开发利用等工程中普遍都要遇到土压力问题, 所以土压力的研究对工程安全具有重要的意义。但由于土压力计算涉及的因素太多, 至今难以通过理论计算作出精确的解答。自 1776 年 Coulomb 和 1857 年 Rankine 建立土压力计算理论以来, 土压力的研究已有 200 余年的历史。以上两种土压力理论通常被称为经典土压力理论, 且 Rankine 土压力理论是 Coulomb 理论的一种特殊情况。现代土力学中土压力的研究是基于 Terzaghi 和 Peak 的建议。目前土压力计算方法有很多^[1~11], 可分为平面问题解、空间问题解和有限元法等^[9]。尽管 Coulomb 和 Rankine 理论还存在不少问题, 但它们在目前的工程中仍得到广泛地应用, 究其原因, 是由于它们的计算模型相对简单, 计算不是十分复杂, 便于应用。

目前, 基于极限状态的土压力计算中, 往往都采用 Mohr-Coulomb 强度理论, 该强度理论未考虑中间主应力效应。根据实际情况和大量的研究表明, 中间主应力效应是存在的且是不容被忽视的。本文基于考虑中间主应力效应的统一强度理论, 按土压力滑楔理论的计算原理推导了基于统一强度理论的土压力公式, Coulomb 公式为其特例。通过变换统一强度理论参数 b 值, 可获得一系列的统

一解。

1 统一强度理论

1991 年俞茂宏在双剪强度理论的基础上, 用一个统一的力学模型、统一而简单的数学表达式, 建立了一种全新的考虑 σ_2 影响的统一强度理论, 能十分灵活地适用于金属到岩土类材料, 其主应力形式的数学表达式为^[2~13]:

$$\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \text{ 时}$$

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t = \alpha\sigma_c \quad (1)$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \text{ 时}$$

$$F' = \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t = \alpha\sigma_c \quad (2)$$

若规定压应力为正, 拉应力为负, 若采用材料的内摩擦角 φ_0 与内聚力 c_0 表示时, 可写为如下形式:

$$\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi_0 \text{ 时,}$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left[\frac{1}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_1 \right] + \left[\sigma_1 + \frac{1}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) \right] \sin \varphi_0 + 2c_0 \cos \varphi_0 = 0 \quad (3)$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi_0 \text{ 时,}$$

[收稿日期] 2003-03-25

[基金项目] 国家自然科学基金项目(50078046); 国土资源部
岩土工程开放研究实验室项目(KF011)

$$f'(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left[\sigma_3 - \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) \right] + \left[\sigma_3 + \frac{1}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_1) \right] \sin \varphi_0 + 2c_0 \cos \varphi_0 = 0, \quad (4)$$

式中: b 为统一强度理论参数; α 为拉压比; $\alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}$, 其中 σ_t 为单轴抗拉强度; σ_c 为单轴抗压强度。

2 统一强度理论的抗剪强度统一表达式

空间任意一点的主应力状态 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 可以组合成无穷多个应力状态, 根据应力状态的特点并选取一定的应力状态参数, 则可以将应力状态划分为几种典型的类型。根据 Lode 参数以及双剪应力状态参数的定义式

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad (5)$$

$$\mu_\tau = \frac{\tau_{12}}{\tau_{13}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_3}, \quad (6)$$

$$\mu'_\tau = \frac{\tau_{23}}{\tau_{13}} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{s_2 - s_3}{s_1 - s_3}, \quad (7)$$

$$\mu_\tau = \frac{1 - \mu'_\sigma}{2} = 1 - \mu'_\tau, \quad (8)$$

$$\mu'_\tau = \frac{1 + \mu'_\sigma}{2} = 1 - \mu_\tau. \quad (9)$$

变换式(5)得

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\mu_\sigma(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}. \quad (10)$$

将式(10)与式(3), 式(4)的判别式比较, 可得:

当 $\mu_\sigma \leq -\sin \varphi_0$ 时, 式(3)可写成

$$\sigma_1 = \frac{(1 + \sin \varphi_0)(2 + b - b\mu'_\sigma)}{2(1+b)(1 - \sin \varphi_0) - b(1 + \mu'_\sigma)(1 + \sin \varphi_0)} \circ \sigma_3 + \frac{4(1+b)c_0 \cos \varphi_0}{2(1+b)(1 - \sin \varphi_0) - b(1 + \mu'_\sigma)(1 + \sin \varphi_0)} \circ \quad (11)$$

当 $\mu_\sigma \geq -\sin \varphi_0$ 时, 式(4)可写成

$$\sigma_1 = \frac{2(1+b)(1 + \sin \varphi_0) - b(1 - \mu'_\sigma)(1 - \sin \varphi_0)}{(1 - \sin \varphi_0)(2 + b + b\mu'_\sigma)} \circ \sigma_3 + \frac{4(1+b)c_0 \cos \varphi_0}{(1 - \sin \varphi_0)(2 + b + b\mu'_\sigma)} \circ \quad (12)$$

$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \varphi_t}{1 - \sin \varphi_t} \sigma_3 + \frac{2c_t \cos \varphi_t}{1 - \sin \varphi_t}, \quad (13)$$

则可求得:

当 $\mu_\sigma \leq -\sin \varphi_0$ 时,

$$\sin \varphi_t = \frac{2(1+b)\sin \varphi_0}{2 + b(1 - \mu'_\sigma) - b(1 + \mu'_\sigma)\sin \varphi_0}, \quad c_t = \frac{2(1+b)c_0 \cos \varphi_0 \cot \left[45^\circ + \frac{\varphi_t}{2} \right]}{2 + b(1 - \mu'_\sigma) - (2 + 3b + b\mu'_\sigma)\sin \varphi_0}. \quad (14)$$

当 $\mu_\sigma \geq -\sin \varphi_0$ 时,

$$\sin \varphi_t = \frac{2(1+b)\sin \varphi_0}{2 + b(1 + \mu'_\sigma) + b(1 - \mu'_\sigma)\sin \varphi_0}, \quad c_t = \frac{2(1+b)c_0 \cos \varphi_0}{(2 + b + b\mu'_\sigma)(1 - \sin \varphi_0) \tan \left[45^\circ + \frac{\varphi_t}{2} \right]}. \quad (15)$$

引入双剪应力状态参数 μ'_τ (或 μ'_τ), 式(14), 式(15)变为:

当 $\mu'_\tau \leq \frac{1 - \sin \varphi_0}{2}$ 时,

$$\sin \varphi_t = \frac{2(1+b)\sin \varphi_0}{2 + 2b(1 - \mu'_\tau) - 2b\mu'_\tau \sin \varphi_0}, \quad c_t = \frac{2(1+b)c_0 \cos \varphi_0 \cot \left[45^\circ + \frac{\varphi_t}{2} \right]}{2 + b(1 - \mu'_\tau) - 2(1 + b + b\mu'_\tau)\sin \varphi_0}. \quad (14')$$

当 $\mu'_\tau \geq \frac{1 - \sin \varphi_0}{2}$ 时,

$$\sin \varphi_t = \frac{2(1+b)\sin \varphi_0}{2 + 2b\mu'_\tau + 2b(1 - \mu'_\tau)\sin \varphi_0}, \quad c_t = \frac{2(1+b)c_0 \cos \varphi_0}{2(1 + b\mu'_\tau)(1 - \sin \varphi_0) \tan \left[45^\circ + \frac{\varphi_t}{2} \right]}. \quad (15')$$

式(13)可写为

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi_t + c_t \cos \varphi_t. \quad (16)$$

根据一点应力状态的 Mohr 圆, 与大主应力作用面成 α 角的面, 其面上的应力为

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha$$

代入式(16)经整理得

$$\tau = \frac{\sin \varphi_t \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha \sin \varphi_t} \sigma + \frac{c_t \cos \varphi_t \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha \sin \varphi_t}. \quad (17)$$

为求得过一点某一平面上的最大剪应力, 根据

求极值的方法, 由 $\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = 0$ 可得

$$\cos 2\alpha = -\sin \varphi_t, \quad (18)$$

故有

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\varphi_t}{2}, \quad (19)$$

因此, 求出的破裂面与大主应力面的夹角成

$$45^\circ + \frac{\varphi_t}{2}.$$

将式(19)代入式(17)得

$$\tau = \sigma \tan \varphi_t + c_t. \quad (20)$$

以上公式可根据判别式, 选用不同的 c_t 与 φ_t 值。

3 滑楔极限平衡理论统一解公式

基于统一强度理论, 导出了土压力理论的统一解, 其计算的基本假定是^[4]:

- (1) 墙后土体为均质各向同性的无粘性土。
- (2) 属平面应变问题。
- (3) 土体表面为一平面, 与水平面成 β 角。
- (4) 主动状态: 挡土墙在土压力作用下, 向前变形, 使土体达极限平衡状态, 形成滑裂面 \overline{BC} 。

被动状态: 挡土墙在外荷作用下, 向土体方向变形, 使土体达极限平衡, 形成滑裂面 \overline{BC} 。

- (5) 在滑裂面上的力满足极限平衡关系

$$T = N \tan \varphi_t.$$

在墙背上的力满足极限平衡关系

$$T = N' \tan \delta$$

式中: φ_t 为土的统一内摩擦角; δ 为土与墙之间的墙背摩擦角。

根据滑楔的平衡关系, 可以求得

$$\begin{cases} E_\alpha = \frac{\sin(\theta - \varphi_t)}{\sin(\alpha + \theta - \varphi_t - \delta)} W, \\ E_p = \frac{\sin(\theta + \varphi_t)}{\sin(\alpha + \theta + \varphi_t + \delta)} W, \end{cases} \quad (21)$$

式中: W 为滑楔自重, 可由下式求得

$$W = \frac{1}{2} \gamma \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

从式(21)可以看出, E_α, E_p 都是 θ 的函数, 其主动土压力必然产生在使 E_α 为最大的滑楔面上; 而被动土压力必然产生在使 E_p 为最小的滑楔面上。因此, 将 E_α 与 E_p 分别对 θ 求导, 求出最危险的滑裂面, 即可求得主动与被动土压力

$$\begin{cases} E_\alpha = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_\alpha, \\ E_p = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_p, \end{cases} \quad (22)$$

式中: γ 为土体的重度; h 为挡土墙的高度; K_α, K_p 分别为主动与被动土压力系数, 可由下式表示

$$\begin{cases} K_\alpha = \frac{\sin^2(\alpha + \varphi_t)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin(\alpha - \delta) \left[1 + \frac{\sin(\varphi_t - \beta) \sin(\varphi_t + \delta)}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \delta)} \right]^2}, \\ K_p = \frac{\sin^2(\alpha - \varphi_t)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin(\alpha - \delta) \left[1 - \frac{\sin(\varphi_t + \beta) \sin(\varphi_t + \delta)}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \delta)} \right]^2}. \end{cases} \quad (23)$$

土压力的方向均与墙背法线成 δ 角, 但无法线所成的 δ 的方向相反(图1)。土压力作用点在没有超载的情况, 均为离墙踵高 $h/3$ 处。

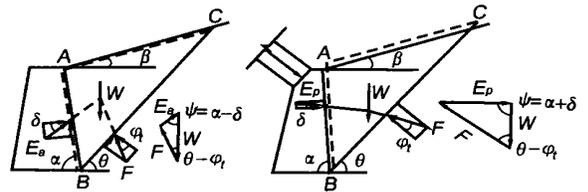


图 1 土压力计算简图

Fig. 1 Model of earth pressure calculation

当墙顶的土体表面作用有分布荷载 q 时(图2), 则滑楔自重部分应增加超载项, 即

$$W = \frac{1}{2} \gamma \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \left[1 + \frac{2q \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\gamma h \sin(\alpha + \beta)} \right].$$

$$\text{令 } K_q = 1 + \frac{2q \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\gamma h \sin(\alpha + \beta)},$$

则上式可写成

$$W = \frac{1}{2} \gamma K_q \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

同理, 可求得主动与被动土压力为

$$\begin{cases} E_\alpha = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_\alpha K_q, \\ E_p = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_p K_q, \end{cases} \quad (24)$$

其土压力的方向仍与墙背法线成 δ 角。土压力的作用点位于梯形的形心, 离墙踵高为

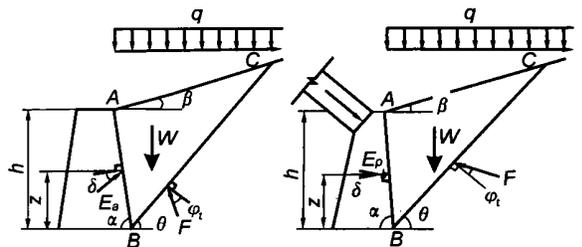


图 2 具有地表分布荷载的情况

Fig. 2 Model of load distribution

$$Z_E = \frac{h}{3} \cdot \frac{2p_\alpha + p_b}{p_\alpha + p_b} = \frac{h}{3} \cdot \frac{\gamma h + 3q}{\gamma h + 2q}$$

式中: p_α, p_b 分别为墙顶与墙踵处的分布土压力。

4 算例

某挡土墙墙高 $h = 6\text{ m}$, 墙面与水平线间的夹角 $\alpha = 75^\circ$, 墙背面填土为无粘性土, 填土表面为一向上倾斜的斜坡面, 与水平面的夹角 $\beta = +10^\circ$, 填土的容重 $\gamma = 16.5\text{ kN/m}^3$, 内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$, 填土与墙面的摩擦角 $\delta = 15^\circ$, 分别计算填土对挡土墙的主动与被动土压力^[9] (表 1, 图 3)。

表 1 土压力计算结果

Table 1 Results of earth pressure calculation

| 应力状态参数 μ'_τ | 土压力 E ($\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$) | 统一强度理论参数 b | | | | |
|-----------------------|--|--------------|----------|----------|----------|----------|
| | | 0 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1.0 |
| 0 | E_α | 146.61 | 146.61 | 146.61 | 146.61 | 146.61 |
| | E_p | 1 511.20 | 1 511.20 | 1 511.20 | 1 511.20 | 1 511.20 |
| 0.25 | E_α | 146.61 | 134.36 | 125.42 | 118.60 | 113.20 |
| | E_p | 1 511.20 | 1 711.11 | 1 893.31 | 2 059.94 | 2 212.82 |
| 0.5 | E_α | 146.61 | 138.58 | 132.92 | 128.69 | 125.42 |
| | E_p | 1 511.20 | 1 636.44 | 1 738.17 | 1 822.41 | 1 893.31 |
| 1 | E_α | 146.61 | 146.61 | 146.61 | 146.61 | 146.61 |
| | E_p | 1 511.20 | 1 511.20 | 1 511.20 | 1 511.20 | 1 511.20 |

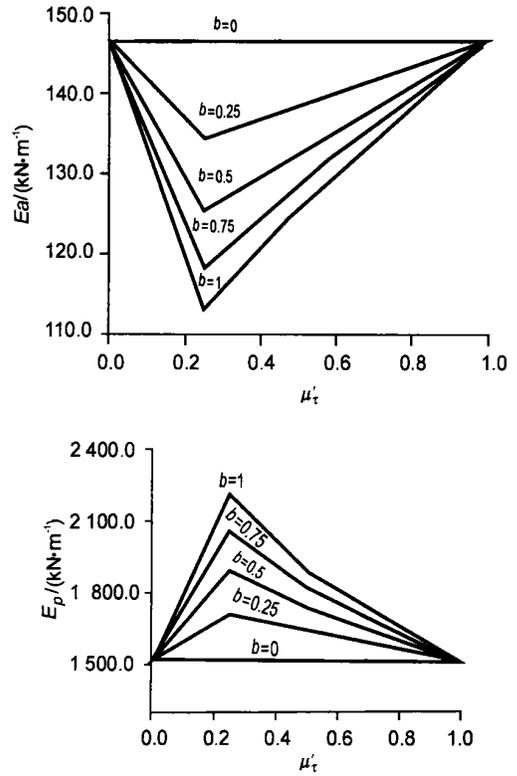


图 3 土压力与双剪应力状态参数的关系
Fig. 3 Relation between earth pressure and twin shearing state parameter

[参 考 文 献]

5 结论与分析

(1) 统一强度理论覆盖了现有的各种强度理论, 它可以适合于从金属到岩土类材料。对于岩土类材料, 根据土体的指标及土质的情况选用适当的 b 值, 可能得到更为合理的结果。

(2) 所得的解包括了 Coulomb 和 Rankine 等一系列的土压力解。

(3) 以上的土压力理论的统一解是根据无粘性土的情况导出的, 因此, 当挡土结构后用粘性土作为填料时, 在实际工程中可采用换算的等值统一内摩擦角 φ_D 来进行计算。

(4) 滑楔土压力计算公式是以平面滑裂面为基础而得到的, 其对于实际的曲面滑裂面有一定的差异。据研究在主动状态滑裂面的曲度较小, 采用平面滑裂面来代替, 偏差不大; 但在被动状态, 采用平面滑裂面存在较大的误差。

(5) 不足之处在于与缺乏实测资料对比分析, 还有待于进一步深入研究。

[1] 朱大勇, 等. 土体主动滑动场及主动土压力的计算 [J]. 计算力学学报, 2000, 17(1): 98 ~ 104.

[2] 陈惠发. 极限分析与土体塑性 [M]. 詹世斌译. 北京: 人民交通出版社, 1995.

[3] 张文革. 挡土墙的库仑土压力 [J]. 力学与实践, 1997, 19(5): 55 ~ 57.

[4] 刘建航, 侯学渊. 基坑工程手册 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997.

[5] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算 [M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2001.

[6] 魏汝龙. 库仑土压力理论中的若干问题 [J]. 港工技术, 1999 (2): 31 ~ 38.

[7] Terzaghi K, Peck R B. Soil Mechanics in Engineering Practice [M]. 2d ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1967. 729.

[8] Tschebotarioff G P. Foundations, Retaining and Earth Structures [M]. 2d ed. McGraw-Hill Book Company, New York, 1973. 642.

[9] 彭胤宗, 沈相男. 粘性土土压力的有限元分析 [M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1991.

[10] 李广信. 基坑支护结构上水土压力的分算与合算 [J]. 岩土工程学报, 2000, 22(3): 348 ~ 352.

[11] 沈珠江. 基于有效固结力理论的粘土土压力公式 [J]. 岩土工程学报, 2000, 22(3): 353 ~ 356.

- [12] Yu M H. Advances in strength theory of material under complex stress in the 20th Century[J]. Applied Mechanics Reviews 2002, 55 (3): 169 ~ 218.
- [13] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1 ~ 9.
- [14] 俞茂宏, 等. 一个新的普遍形式的强度理论[J]. 土木工程学报, 1990, 23(1): 34 ~ 40.
- [15] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

Unified solution of the theory on sliding wedge for earth pressure

ZHAI Yue¹, LIN Yong-liang¹, FAN Wen^{1,2}, YU Mao-hong²

(1. School of Geological Engineering and Surveying Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, China;

2. School of Civil Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The paper presents the results of the unified solutions related to the theory of earth pressure of sliding wedge, based on the Yu Mao-hong's unified strength theory in which the effect of the intermediate principal stress is considered. The formulas deduced in this paper can be widely applied in geotechnical engineering. The solutions of Rankine and Coulomb are special cases of the unified solutions. A series of unified solutions can be obtained by adopting different values of σ_3 and stress state parameters. So earth pressure can be calculated effectively by selecting suitable value of σ_3 adapting to the real conditions.

Key words: unified strength theory; intermediate principal stress; earth pressure; unified solutions

(英文审定: 苏生瑞)

(上接第 16 页)

[参 考 文 献]

- [1] 傅良魁. 激发极化法[M]. 北京: 地质出版社, 1982.
- [2] 袁见齐, 朱上庆, 翟裕生. 矿床学[M]. 北京: 地质出版社, 1979.
- [3] 黄崇轲, 白冶, 等. 中国铜矿床[M]. 北京: 地质出版社, 2001.
- [4] 李朝阳, 徐贵忠, 胡瑞忠. 中国铜矿主要类型特征及其成矿远景[M]. 北京: 地质出版社, 2000.
- [5] 裴荣富, 熊群尧, 沈保丰. 难识别及隐伏大矿、富矿资源力的地质评价[M]. 北京: 地质出版社, 2001.
- [6] 冀树楷, 傅昭仁, 李树屏, 等. 中条山铜矿成矿模式及勘查模式[M]. 北京: 地质出版社, 1992.

Metallogenetic targets and prospect analyses of the Wujiagou copper-gold deposit, Shanxi province

YANG Yin-chuan, YAO Jing-xuan

(Shanxi Institute of Geophysical and Geochemical Exploration, Shanxi Yuncheng 044004, China)

Abstract: Certain known Cu-Au deposits around Wujiagou show an advantageous geological setting for metallogenesis in this area. Yet the ore fields lack the layered skarn type of Cu-Au deposits controlled by the shearing zones. It is thus significant to target this type of mineral deposits that are not exposed or at depth through geochemical and geophysical methodologies. The exposed strata in the Wujiagou ore field belong to the Sushui Group of Archaean age and the Zhongjiao Group of Proterozoic age, consisting mainly of gneisses, granitoids and marbles. The occurrence of granitoids and mineral deposits is primarily controlled by three EW-orientated ductile-shearing zones and one NS-striking compressing-shearing fault belt. The Wujiagou diorite porphyries, shaped as a strip, extend in NE and dip toward SE. The NE-striking Cu-Au metallogenetic belt is hosted by the impure marbles of the Yuyuanxia Formation and controlled by shearing zone III, according with the occurrence of the poly-metallic mineralization skarn zone. Cu-Au mineralization disseminated or as veinlets is distributed in skarns. Polarization anomalies of the mineralized skarn are in large scale and manifest high intensity and the apparent gradient and center, suggesting that the polarized bodies generally plunge toward SW. This corresponds to the fact that intense Cu anomalies mark the NE part of the geochemical anomalies, whereas the SW part is only identified by related halo elements. Consequently, there is a large scale of Cu-Au deposit at depth in Wujiagou.

Key words: Wujiagou ore field; metallogenetic target; prospect analysis

(英文审定: 周军)