

有限元法与伪谱法混合求解弹性波动方程

马德堂¹, 朱光明²

(1. 长安大学 理学院, 陕西 西安 710064; 2. 长安大学 地质工程与测绘工程学院, 陕西 西安 710054)

[摘要] 在地震波场数值模拟中, 有限差分法、有限元法和伪谱法都是常用的基本方法, 但它们各有不同的适应性和优缺点, 如有限差分法、有限元法都存在减弱网格频散和提高计算效率的矛盾, 而伪谱法的网格频散小且计算效率高。有限差分法和伪谱法在处理地表结构复杂或地表剧烈起伏以及地下结构复杂的情况时存在较大的难度, 而有限元法可较为理想地拟合起伏地表和任意弯曲界面, 且可方便地处理自由边界条件和界面边界条件。尝试将有限元法和伪谱法相结合, 形成地震波场数值模拟的一种混合方法, 利用二者的优点, 克服二者的缺点, 达到既减弱网格频散又提高计算精度和效率的目的。并采用所谓的‘过度区域’技术解决两种不同算法的衔接问题。模拟实例表明, 给出的混合模拟方法不失为弹性波场数值模拟的一种有效方法。

[关键词] 弹性波场数值模拟; 有限元法; 伪谱法; 混合模拟方法

[中图分类号] P315.3⁺1 [文献标识码] A [文章编号] 1672-6561(2004)01-0061-04

[作者简介] 马德堂(1965—), 男, 陕西旬阳人, 讲师, 博士研究生, 现从事数学教学和波动方程数值解法的研究工作。

在地震波场数值模拟中, 有限差分法、有限元法和伪谱法是常用的数值方法。有限差分法由于其实现过程简单而被广泛应用, 但当地表起伏较大或地质结构复杂时, 有限差分法却难保模拟精度。在这种复杂情形下, 有限元法有其突出优势, 即可采用灵活的网格剖分方式, 较为理想地拟合起伏地表和任意形状的界面^[1], 而且零应力自由边界条件和两种固体介质界面上的应力连续以及位移连续的边界条件能自动满足, 但它和有限差分法一样, 要求单个波长内的采样点数要足够多, 否则会产生较大的频散误差。伪谱法是一种整体方法, 在均匀介质情况下, 其精度很高, 而且单个波长内所需的采样点数较少^[2]; 但由于它的实现过程主要是利用快速离散傅里叶变换, 所以自然地引入了周期性边界条件, 使得自由边界条件很难实现, 人工边界的反射也不易消除^[3]。所谓混合模拟方法是将两种不同的数值模拟方法相结合, 利用二者的优点, 克服二者的缺点, 提高数值模拟方法的精度和对模型的适应性。如文献[4]将边界元方法和屏方法相结合

模拟地表起伏、地下不均匀介质模型中的波传播, 得到了较好的模拟效果。

笔者给出的混合数值模拟算法是利用有限元法计算模型的周边附近区域的波场值, 利用伪谱法计算模型内部区域的波场值, 这样使得自由边界条件能自动满足, 人工边界的反射也容易消除, 且既提高了模拟精度, 也节省了计算量。笔者采用了所谓的‘过度区域’技术解决了两种不同算法的衔接问题。模拟实例表明, 这里给出的混合模拟算法是一种有效的弹性波场数值模拟方法。

1 弹性波场数值模拟的有限元法和伪谱法的原理概述

有限元法弹性波场数值模拟的基本原理是在二维弹性介质情形下, 将地质模型剖分为有限个三角形单元或剖分为有限个三角形单元和矩形单元, 计算出每个单元对应的单元刚度矩阵 $\{K\}^{(e)}$ 和质量矩阵 $\{M\}^{(e)}$, 再用刚度集成法形成总体刚度矩阵 $\{K\}$, 用质量集中方法形成总体质量矩阵 $\{M\}$, 这时就形成了有限元方程组

$$\{M\}\{\ddot{U}\} + \{K\}\{U\} = \{R\}, \quad (1)$$

式中: $\{U\}$ 为所有结点上位移的水平分量 u 和垂直分量 w 构成的列向量; $\{\ddot{U}\}$ 为所有结点上的位移 u 和 w 关于时间的二阶偏导数构成的列向量; $\{R\}$ 为所有结点上外力的水平分量和垂直分量构成的列向量, 这里主要是指震源力。

对于每次时间步进, 根据方程组(1) 计算 $\{\ddot{U}\}$, 再用关于时间的二阶中心差分求 $\{U\}$ 。

伪谱法弹性波场数值模拟的基本原理: 有限元方程组(1)对应的二维弹性波动方程为:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z},\end{aligned}\quad (2)$$

式中: λ, μ 为拉梅常数; ρ 为密度。

在用伪谱法进行波场模拟时, 应将地质模型沿 x, z 方向分别等间距划分, 且 x, z 方向上的样点数分别应取为 $n_x = 2^m, n_z = 2^k$, 其中 m, k 为正整数, 即将地质模型划分为 $n_x \times n_z$ 个大小相等的矩形单元。若用 $u(i, j), w(i, j)$ 分别表示弹性波场在离散样点 (i, j) 处的水平分量和垂直分量, 用 $\hat{u}(i, j)$ 等表示相应波场的离散傅立叶变换, 用 $u_{xx}(i, j)$ 等表示相应波场的关于下标变量的偏导数, 则伪谱法实现弹性波场数值模拟对于每次时间步进需作如下运算:

(1) $u(i, j), w(i, j)$ 分别加入震源项 $f(i, j), g(i, j)$, 并计算 $\hat{u}(i, j), \hat{w}(i, j)$ 。

(2) 用傅立叶变换的微分性质计算 $\hat{u}_{xx}(i, j), \hat{u}_{zz}(i, j), \hat{w}_{xx}(i, j), \hat{w}_{zz}(i, j), \hat{w}_{xz}(i, j)$ 。

(3) 用反傅立叶变换计算 $u_{xx}(i, j), u_{zz}(i, j), u_{xz}(i, j), w_{xx}(i, j), w_{zz}(i, j), w_{xz}(i, j)$ 。

(4) 利用二阶关于时间的中心差分计算 $u(i, j), w(i, j)$ 。

2 有限元法和伪谱法相结合的弹性波场数值模拟的混合方法

这里给出的弹性波场数值模拟的混合方法可分为以下几个步骤:

(1) 把计算区域从大的方面划分为三部分。当地质模型的地表为平面时(图 1), 第一部分为模型的边界区域, 即图 1 中的第二个实线矩形框以外的部分; 第二部分是为了使有限元法和伪谱法能有

结合而划分出的过度性区域, 即图 1 中的第二个实线矩形框与第三个实线矩形框之间的部分; 第三部分为模型的内部区域, 即图 1 中的第三个实线矩形框以内的部分。当地质模型的地表起伏时(图 2), 这三部分的划分与平地表情形基本一致, 所不同的是须将模型的起伏部分全归于边界区域。

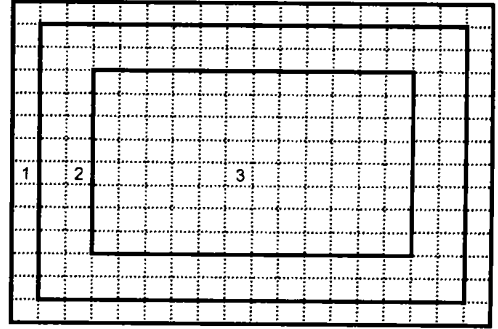


图 1 平地表模型

Fig. 1 Flat surface model

Fig. 1 Flat surface model

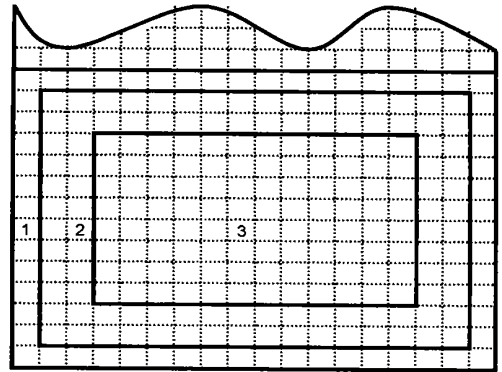


图 2 起伏地表模型

Fig. 2 Rugged surface model

(2) 将计算区域进行网格划分(图 1, 图 2)。首先将过度区域和内部区域合二为一, 并按伪谱法所要求的网格间距将其划分为 $n_x \times n_z$ 个大小相等的矩形单元, 其中 n_x, n_z 应为 2 的正整数次方。再将过度区域和边界区域合二为一, 并按有限元法对网格间距要求将其划分为有限个矩形单元或有限个矩形单元和三角形单元的组合, 特别是在起伏地表处须用三角形单元逼近, 以便达到较好的模拟效果。

为充分发挥有限元法可自动实现自由边界条件和便于消除人工边界反射的优点, 同时使有限元法和伪谱法能有机结合, 将过度区域的宽度取为 10 个伪谱法的网格间距。

(3) 计算出边界区域和边界区域内每个单元对应的单元刚度矩阵 $\{K\}^{(e)}$ 和质量矩阵 $\{M\}^{(e)}$ 。再用

刚度集成法形成总体刚度矩阵 $\{K\}$, 用质量集中方法形成总体质量矩阵 $\{M\}$ 。

(4)实现弹性波场数值模拟计算。对于每个时间步, 用有限元法计算过度区域和边界区域内各结点处的波场值; 用伪谱法计算内部区域中各结点处的波场值, 但正离散傅里叶变换必须用过度区域和内部区域中对应伪谱法的所有结点上的波场值, 这正是有限元法和伪谱法能够有机结合的关键所在。

3 模拟算例

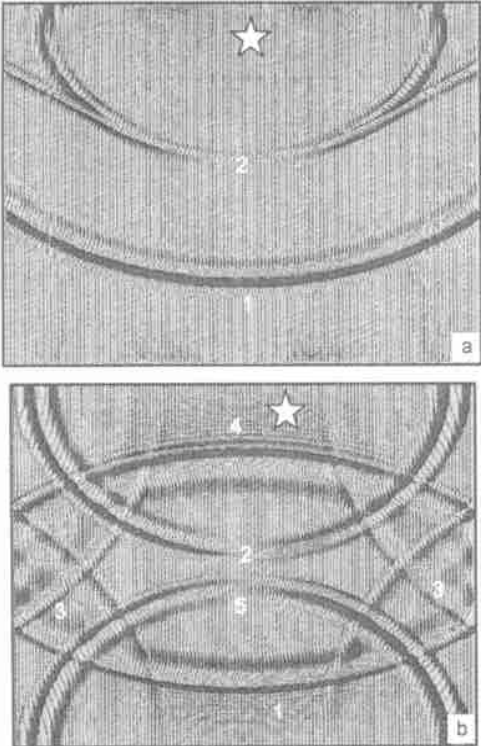
将通过几个二维模拟算例说明, 这里提出的有限元法和伪谱法相结合的弹性波场数值模拟的混合方法的优点。

模拟算例 1: 均匀弹性介质模型, $V_p=3\,500\text{ m/s}$, $V_s=2\,000\text{ m/s}$, 震源位于模型剖面中点地表下 20 m 处。图 3 为 $t=600\text{ ms}$ 时的弹性波场垂直分量的快照, 图 3a 为由混合方法模拟出的结果, 图 3b 为由伪谱法模拟出的结果。从图 3b 中可以看到很强的人工边界反射和周期性边界形成的对称

虚震源产生的波前, 而图 3a 中不再有这些干扰波, 这是由于在每次时间步进中, 过度区域及其以外的结点上的波场值是采用有限元法计算的, 而在用伪谱法计算内部区域结点上的波场值时所用到的数据边界是过度区域结点上的波场值, 所以使得伪谱法和整个模拟数据体不再有周期性边界, 同时使得自然边界条件自动满足。这里使用了哥伦比亚大学邓玉琼教授提供的有限元法声波模拟的吸收边界技术。

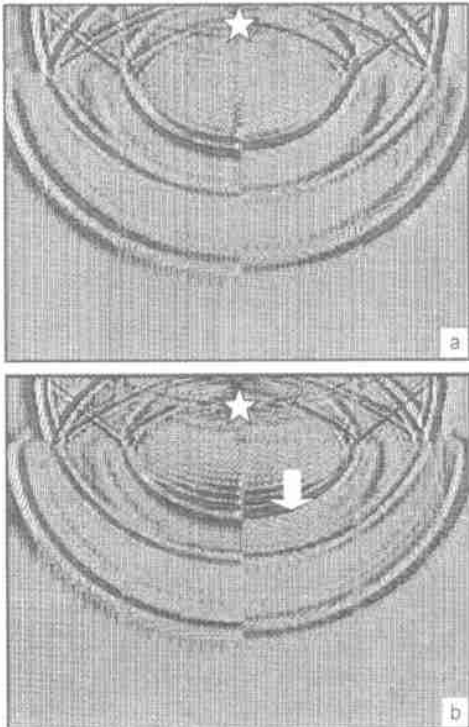
模拟算例 2: 层状介质模型, 上层 $V_p=2\,600\text{ m/s}$, $V_s=1\,600\text{ m/s}$, 下层 $V_p=4\,000\text{ m/s}$, $V_s=2\,500\text{ m/s}$, 震源位于模型剖面中点地表下 20 m 处。图 4 为 $t=400\text{ ms}$ 时的弹性波场水平分量的快照, 图 4a 为由混合方法模拟出的结果, 图 4b 为由有限元法模拟出的结果。在这两种方法的模拟过程中, 所采用的震源子波和网格间距是相同的。从图 4b 中可以看到网格频散现象, 而图 4a 中没有网格频散现象。这是由于在每次时间步进中, 内部区域结点上的波场值是用精度高、频散小的伪谱方法计算的, 所以在一定程度上消除了有限元法产生的频散误差。

模拟算例 3: 起伏地表地质模型, 如图 5a, 其中有两个相对高差为 400m 的突起, 有一个平界面,



a, b 图分别为由混合方法和纯伪谱方法模拟出的 600 ms 时的垂直分量的快照, 图中标号: 1—纵波波前; 2—横波波前; 3—边界反射波波前; 4、5—由伪谱法的对称虚震源产生的波前, 星号表示震源的实际位置

图 3 均匀介质弹性波场数值模拟快照

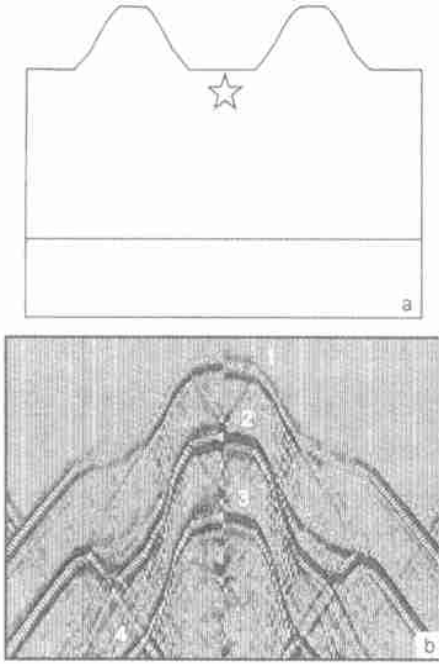


a, b 图分别为由混合方法和纯有限元法模拟出的 400 ms 时的水平分量的快照; 箭头指出网格频散现象; 星号表示震源位置

图 4 层状介质弹性波场数值模拟快照

Fig. 3 Wave field snapshots in homogeneous medium model

Fig. 4 Wave field snapshots in layered medium model



a—起伏地表地质模型; b—由混合方法模拟出的沿起伏地表的地震记录; 1—反射 P 波; 2—转换 S 波; 3—反射 S 波; 4—绕射波

图 5 起伏地表模型及模拟地震记录

Fig. 5 Rugged surface model and numerical seismogram

上层 $V_p = 3\ 500\ \text{m/s}$, $V_s = 2\ 000\ \text{m/s}$, 下层 $V_p = 4\ 500\ \text{m/s}$, $V_s = 2\ 400\ \text{m/s}$, 震源位于模型的正中地表下 20 m 处。图 5b 为由混合方法模拟出的沿起伏地表的地震记录, 从中可看到由平界面产生的各种反射同相轴及其由地表起伏引起的变形, 也可看

到在起伏地表大的拐弯处产生的绕射。为显示的需要, 图 5b 中不含直达波。

4 结论

这里给出的弹性波场数值模拟的混合方法, 利用有限元法和伪谱方法的优点, 弥补了二者的缺陷。它即能很好地处理自由边界条件, 也能较好地消除人工边界的反射, 又有较高地精度, 是一种有效地混合方法。

[参 考 文 献]

- [1] Benxi Ke, Bo Zhao, Jianming Cai et al. 2-D finite element acoustic wave modeling including rugged topography[A] . Soc. Expl. Geophys. 71th Ann. Internat. Mtg[C] . Tulsa, USA, 2001.
- [2] Bengt Fornberg . The pseudospectral method; comparisons with finite differences for the elastic wave equation. Geophysics[J] , 1987, 52 (4): 483 ~ 501.
- [3] Takashi Furumura and Hiroshi Takenaka . A wraparound elimination technique for the pseudospectral wave synthesis using an anti-periodic extension of the wavefield[J] . Geophysics. 1995, 60(2): 302 ~ 307.
- [4] Rushan Wu, Li Yun Fu. A hybrid method for wave propagation simulation in near-surface regions[A] . Soc. Expl. Geophys. 68th Ann. Internat. Mtg[C] . Tulsa San Antonio, USA, 1998.

Hybrid method combining finite difference and pseudospectral method for solving the elastic wave equation

MA De-tang¹, ZHU Guang-ming²

(1. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China; 2. School of Geological Engineering and Surveying Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, China)

Abstract: Many different methods proposed for modeling waves have their own range of validity and limitation. For example, Finite different (FD) techniques have been widely used in wave modeling. One advantage of FD techniques is their ability to model wave propagation in media with fairly general spatial variation of elastic properties. However, particularly for models with sharp discontinuities, FD schemes are by no means free from accuracy problem. Finite element(FE) method has been shown to be an efficient alternative tool for modeling wave propagation in complex structures. Pseudo-spectral method(PS) has advantages of higher accuracy and lower dispersion than FD method and FE method, but, there exists difficulties in dealing with free surface boundary condition as FD method.

Here we develop a hybrid method which couples the FE method with PS method to model near boundary wave field and inner wave field respectively, to use the advantages of the two methods and to increase the numerical accuracy and computation efficiency. The problems concerning connection of the two methods are solved by introducing the transition region between near boundary and inner region. Numerical examples have demonstrated the validity and the advantages of the hybrid method given here.

Key words: elastic wave field numerical modeling; finite difference method; pseudospectral method; hybrid method

(英文审定: 李庆春)