

声子在地幔矿物热传递过程中的作用

何安明, 李 纯, 石焕文

(长安大学 理学院, 陕西 西安 710064)

[摘要] 采用非平衡量子统计方法讨论了地幔矿物声子热传导的3种不同情况, 得到了较为普遍的结果, 结果表明在地下幔声子热传导将是主要机制。

[关键词] 声子; 热传递; 地幔

[中图分类号] P574.19; O545 [文献标识码] A [文章编号] 1672-6561(2004)02-0032-02

[作者简介] 何安明(1945—), 男, 浙江鄞县人, 教授, 现从事物理教学与研究工作。

地幔热传递机制与地球的起源、地球动力学以及地球热演化等问题关系密切, 因而有关该机制的理论研究是地球物理学研究的重要课题。以往的地幔矿物热传递模型都是在仅考虑体系内部处于平衡状态下得到的, 有一定局限性^[1~2]。笔者在前人研究的基础上, 采用非平衡量子统计方法, 对以前的理论进行修正和补充, 从而使文献[1~2]所讨论的声子热传导问题, 成为理论研究的一个特殊情况(平衡状态)。

1 模型和统计处理

在地球内部的条件下, 地幔的岩石可以看作是绝缘体或半导体, 其中, 电子对岩石热导率的贡献较小, 而岩石的晶格振动将起主导作用。设地幔中某一种矿物晶体声子体系的哈密顿量为:

$$H = \sum_i h\nu_i a_i^+ a_i + \sum_k h\Omega_k b_k^+ b_k + \sum_{k,j,i} h(\eta a_i b_j^+ + \eta^* a_i^+ b_j) + \sum_{m,i} h(\xi P_m a_i^+ + \xi^* P_m^+ a_i), \quad (1)$$

式中: a_i^+ 和 a_i 是体系中 i 粒子的产生算符和湮灭算符, 其振动频率为 ν_i ; b_k^+ 和 b_k 是贮库中 k 粒子的产生和湮灭算符, 其频率为 Ω_k ; P_m^+ 和 P_m 是外部能源中 m 粒子的产生和湮灭算符, η 和 ξ 为待定耦合系数, η^* 和 ξ^* 分别是 η 和 ξ 的共轭复数, h 为普朗克常数。那么, 第 i 态的粒子分布随时间的变化率为

$$\dot{n}_i = (ih/2\pi)^{-1} [n_i, H], \quad (2)$$

式中: $n_i = a_i^+ a_i$, 经变换可得到处于稳定状态的粒子分布

$$\langle n_i \rangle = \left\{ 1 + \frac{\Phi u_i}{\chi U} [1 - \exp(-\beta \mu)] \right\} \cdot \left\{ \exp[\beta(h\nu_i - \mu)] - 1 \right\}^{-1}, \quad (3)$$

其中

$$U = \sum_i u_i = \sum_i \Phi [\langle n_i \rangle \exp(\beta h\nu_i) - (1 + \langle n_i \rangle)], \quad (4)$$

$$\mu = -\frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{\Phi + \chi \sum_j (1 + \langle n_j \rangle)}{\Phi + \chi \sum_j \langle n_j \rangle \exp(\beta h\nu_j)} \right], \quad (5)$$

$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad (6)$$

式中: U 为外界能源供给该体系声子流的速率, μ 为体系的化学势, 系数 Φ 、 χ 一般与温度 T 有关, k 为玻尔兹曼常数。体系的总粒子数为

$$N = \sum_i \langle n_i \rangle. \quad (7)$$

2 讨论

(1) 当 $U = 0$ 时, 体系处于平衡状态。由式(4)可以得到

$$n_i = [\exp(\beta h\nu_i) - 1]^{-1}, \quad (8)$$

采用德拜模型^[3], 可得到定容热容为

$$C_v = 3Nk \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{\Theta_D}{T} \right)^2 + \frac{1}{560} \left(\frac{\Theta_D}{T} \right)^4 - \dots \right], \quad (9)$$

式中: Θ_D 为德拜特征温度, 因地幔温度较高, 故有

$$C_v = 3Nk, \tag{10}$$

通过推导, 可以得到地幔矿物声子热导率为

$$\lambda = \lambda_0 \rho^{-\frac{1}{2}} T^{-1}, \tag{11}$$

式中: λ_0 为经验系数; ρ 为矿物的密度。从式(11)可以看出, 压力的增加可以使声子热导率增大, 而温度的增高反而使声子热导率减小。根据超石英和镁方铁矿的状态方程^[4], 估计在下地幔条件下压力效应远远超过温度效应, 所以在下地幔中, 声子热传导将是热传递的主要机制。

(2) 当 $U < 0$ 时, 体系处于非平衡状态。总输出大于总输入, 该体系成为另一体系的粒子和能量源, 这时式(11)变为

$$\lambda = \frac{1}{3} C v D, \tag{12}$$

式中: D 是介质的线度尺寸; v 是声子的平均速率; C 是介质单位体积的热容。

(3) 当 $U > 0$ 时, 体系处于非线性非平衡状态。

由式(4)可知

$$\sum_i \langle n_i \rangle \exp(\beta \Theta_D h \nu_i) > \sum_i (1 + \langle n_i \rangle), \tag{13}$$

这时, 从式(5)可知, $\mu > 0$ 。设 u_i 的最大值为 u_m , 则由式(3)和式(7)可得到总粒子数为

$$N < \left\{ 1 + \frac{\Phi u_m}{\chi U} [1 - \exp(-\beta h \nu_1)] \right\}。$$

$$\sum_i \left\{ \exp[\beta(h \nu_i - \mu)] - 1 \right\}^{-1}, \tag{14}$$

若能量供给速率 U 增大(即总粒子数 N 增大), 则 μ 也随之增大。这样, 当 N 增大到某个阈值时, μ 就会增大且接近 $h \nu_1$ 振动能级, 这时就会有大量数量的声子进入这个振动能级上, 体系进入非线性区, 称之为玻色凝聚现象。如果地幔存在玻色凝聚现象, 则光学支声子的热传导将是地幔矿物热传递的主要机制。

3 结论

(1) 在下地幔中, 声子热传导将是热传递的主要机制。

(2) 若地幔中存在着声子的玻色凝聚现象, 那么, 光学支声子将在声子热传导过程中起主导作用, 它出现的同时还伴随着同频率的光辐射。

[参 考 文 献]

[1] Lubimova E A. The Earth's Mantle[M]. Ed T. F. Gaskell, Academic Press. 1967. 259.
[2] Mao H K, Cameg. Inst. Washington Yearbook[M]. 1973. 561.
[3] 胡照林. 统计热力学[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社. 1982. 87.

Role of phonon thermal conductivity in the minerals of the earth's mantle

HE An-ming, LI Chun, SHI Huan-wen

(School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract According to the new literatures of the physical properties of minerals in the mantle under high temperature and high pressure the processes of stimulation, transfer and absorption of phonons of minerals in the mantle were investigated by using nonequilibrium quantum statistics. It had been found that the mechanism of the thermal conductivity of phonons of minerals in the mantle could be divided into three kinds. The results show that: In the transit zone and submantle, the phonon thermal conductivity is the main mechanism of minerals in the mantle because that pressural effect's surpassing temperaturational effect causes phonon thermal conductivity increasing with the depth; In the mantle if Bose's condensing phenomenon under nonlinearity and nonequilibrium state exists a great quantity of optical braching phonons will enter the same vibration energy level and the optical braching phonons will play a leading role in the phonon thermal conductivity.

Key words phonon; thermal conductivity; mantle; mineral

(英文审定: 周军)