

# GPS 水准的有限元法与多面函数法的加权综合模型

刘万林, 王 利, 赵超英

(长安大学 地质工程与测绘工程学院, 陕西 西安 710054)

[摘要] 应用有限元法与多面函数法的加权综合模型改进拟合模型在逼近高程异常曲面时的拟合效果。由大地高求出准确的正常高, 通常应用有限元法或多面函数法等单一拟合模型来拟合高程异常曲面。GPS 水准的单一模型在逼近高程异常曲面时其拟合效果往往不稳定。通过对实测数据的计算分析可发现: 有限元法与多面函数法的加权综合模型的逼近结果比单一模型的逼近结果有了一定的提高。由此可见综合模型对于局部地区解决 GPS 高程转化为正常高是有使用价值的。

[关键词] GPS 水准; 有限元法; 多面函数法; 综合逼近模型

[中图分类号] P207 [文献标识码] A [文章编号] 1672-6561(2004)03-0048-04

[作者简介] 刘万林(1966—), 男, 陕西岐山人, 讲师, 现从事大地测量学教学与研究工作。

全球定位系统(GPS)是美国国防部建立的新一代卫星导航定位系统, 具有全天候作业、可提供三维坐标、定位精度高、观测时间短和自动化程度高等诸多优点, 在大地测量、工程测量、变形监测、地籍测量、航空摄影测量和海洋测绘等许多领域的应用已甚为普遍。实践结果表明, 利用 GPS 定位技术建立的短基线平面控制网其相对精度可达  $10^{-8} \sim 10^{-9}$ , 其垂直分量的精度可达毫米级, 但由于 GPS 技术测定的是大地高  $H_{Ag}$ , 而不是所使用的正常高  $H_r$ , 两者之间存在如下的函数关系:

$$H_r = H_{Ag} + \zeta, \quad (1)$$

式中:  $\zeta$  为高程异常, 若已知某点的高程异常和大地高, 则可按式(1)求得其正常高。

这里把综合利用 GPS 测量成果和水准测量资料确定高程异常的方法称为 GPS 水准, 其实质是对局部区域内的似大地水准面的逼近。常用的方法有: 平面拟合法、二次曲面拟合法、多面函数法、样条函数法、有限元法和边界元法等。由于存在模型误差, 单一模型的拟合效果往往不稳定, 因而也降低了成果的可信度。笔者在论述有限元法与多面函数法的基础上, 提出应用有限元法与多面函数法的加权综合模型来逼近高程异常的方法。

## 1 有限元法

由于高程异常曲面具有均衡性<sup>[1]</sup>, 在数学上可用调和函数来描述之, 即:

$$\zeta = \zeta(x, y, z). \quad (2)$$

式(2)满足拉普拉斯方程, 即:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

在面积不太大的区域内, 也可以在高斯平面上研究高程异常函数, 即有:

$$\zeta = \zeta(x, y), \quad (4)$$

显然, 同样有:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0, \quad (5)$$

式(5)称为泛定方程, 要想由它解出高程异常函数需要补充一个边界条件。对于某个特定的参考椭球, 如果已知区域边界上的高程异常函数, 则可构成拉普拉斯方程第一边值问题:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta(x, y)}{\partial y^2} &= 0 \\ \zeta(x, y) \big|_S &= \zeta_s(x, y) \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

式中:  $S$  代表区域边界,  $\zeta_s(x, y)$  即为边界上已知高程异常函数。

求解拉氏方程第一边值问题最有效的数值方法之一是有限元法, 其基本思想是: 把偏微分方程

[收稿日期] 2003-12-12

[基金项目] 中美国际合作项目(NSF EAR 97-25563)

定解问题化为求等价泛函的极值问题, 把问题的连续解离散化为计算网格节点上的近似值。

根据变分原理, 求解拉氏方程第一边值问题式(6), 等价于在边界条件的约束下, 求以下泛函的极小值问题, 即:

$$\begin{cases} J[\zeta(x, y)] = \frac{1}{2} \iint_D \left[ \left( \frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min, \\ \zeta(x, y) |_{(x, y) \in S} = \zeta_s(x, y). \end{cases} \quad (7)$$

为了获得上述问题的最优近似解, 有限元法通常以一张三角形网格覆盖在所研究的区域上, 从而把求问题的连续解, 离散化为三角形网格顶点上的数值解。其几何意义则是用一张由若干个三角形元组成的分片平面逼近高程异常曲面。

在每个三角形元  $e$  上, 不妨假定高程异常函数  $\zeta(x, y)$  是点位  $(x, y)$  的线性函数, 即:

$$\zeta(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (8)$$

式中: 模型参数  $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$  可由三角形元  $e$  的 3 个顶点  $i, j, m$  形成的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta(x_i, y_i) \\ \zeta(x_j, y_j) \\ \zeta(x_m, y_m) \end{bmatrix},$$

按 Cramer 法则求出。以式(8)代入式(7)后经简单运算可得三角形元  $e$  上泛函近似表达式:

$$J^{(e)}[\zeta(x, y)] = \frac{1}{2} (\zeta^{(e)})^T (K^{(e)}) (\zeta^{(e)}), \quad (9)$$

式中:  $(\zeta^{(e)}) = (\zeta(x_i, y_i) \zeta(x_j, y_j) \zeta(x_m, y_m))^T$ ;  $(K^{(e)})$  是单元刚度矩阵, 其表达式为:

$$(K^{(e)}) = \frac{1}{4\Delta e} \begin{bmatrix} B_i^2 + C_i^2 & B_j + C_j C_i & B_i B_m + C_i C_m \\ B_j B_i + C_j C_i & B_j^2 + C_j^2 & B_j B_m + C_j C_m \\ B_m B_i + C_m C_i & B_m B_j + C_m C_j & B_m^2 + C_m^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

且有:

$$\begin{aligned} B_i &= y_i - y_m, & B_j &= y_m - y_j, & B_m &= y_i - y_j, \\ C_i &= x_m - x_j, & C_j &= x_i - x_m, & C_m &= x_j - x_i, \end{aligned}$$

而  $\Delta e = \frac{1}{2} |C_i B_j - C_j B_i|$  为三角形元  $e$  的面积。

按三角形元  $e$  的编号叠加式(9)可得整个测区上的泛函近似表达式:

$$J[\zeta(x, y)] = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^k (\zeta^{(e)})^T (K^{(e)}) (\zeta^{(e)}),$$

或者简写为:

$$J[\zeta(x, y)] = \frac{1}{2} \zeta^T K \zeta, \quad (11)$$

式中:  $\zeta$  为  $n+p$  维高程异常向量;  $k$  为  $n+p$  阶刚度矩阵;  $N$  为测区内的网格顶点数, 即 GPS 点数;  $P$  为测区边界上的水准点数。

为求泛函的极小值, 对二次型式(11)求导, 并令其结果等于 0; 即

$$\frac{\partial J[\zeta(x, y)]}{\partial \zeta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+p, \quad (12)$$

由此可得代数方程组:

$$\sum_{j=1}^{n+p} K_{i,j} \zeta_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+p.$$

顾及边界上  $P$  个水准点的已知高程异常  $\zeta_{sj} (j = n+1, \dots, n+p)$ , 则上式可改写成:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \zeta_j = - \sum_{j=n+1}^{n+p} K_{i,j} \zeta_{sj} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+p, \quad (13)$$

$$\text{令: } G_i = - \sum_{j=n+1}^{n+p} K_{i,j} \zeta_{sj}, \quad i = 1, 2, \dots, n+p, \quad (14)$$

以此代入式(13), 并划去最后多余的  $P$  个边界点方程, 即得计算测区内各三角形元顶点 (即 GPS 点) 高程异常的有限元方程组:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \zeta_j = G_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

可以证明, 刚度矩阵为一对称正定矩阵, 因此方程组式(15)有唯一解。

## 2 多面函数法

Hardy 提出的多面函数法的基本思想是: 任何不规则连续曲面总可以用  $K$  个规则曲面的叠加来逼近。

根据这一思想, 高程异常函数可表示为:

$$\xi(x, y) = \sum_{j=1}^k \alpha_j Q(x, y; x_j, y_j), \quad (16)$$

式中:  $\alpha_i$  为待定系数;  $Q(x, y; x_i, y_i)$  为核函数;  $(x, y)$  为未测点坐标;  $(x_i, y_i)$  为已测点坐标。

核函数一般可取:

$$Q(x, y; x_i, y_i) = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + \delta]^{-b}, \quad (17)$$

式中:  $\delta$  称为平滑因子, 为了得到较好的逼近效果, 应作一定的试算后确定;  $b$  为一可供选择的非零实数, 一般取  $1/2$ , 即核函数为正双曲型。

式(16)可写成:

$$\zeta = Q\alpha, \tag{18}$$

待求参数可根据已测点的高程异常值按最小二乘法计算, 即有:

$$\alpha = (Q^T Q)^{-1} Q^T \zeta, \tag{19}$$

于是未测点  $P$  的高程异常值为:

$$\zeta_p = Q_p \alpha = Q_p (Q^T Q)^{-1} Q^T \zeta. \tag{20}$$

3 有限元法与多面函数法的加权综合模型

有限元法和多面函数法在逼近高程异常时, 都可能存在模型误差, 其拟合结果往往不稳定, 因此拟合的精度和可靠性不高。

有限元法与多面函数法的加权综合模型的基本思想是: 用同样的 GPS 网的平差成果及水准测量的成果, 分别用有限元法和移动法来逼近高程异常曲面, 然后再对两者的逼近结果进行加权综合。

用数学模型可表示为:

$$MinJ = (Y - FW)^T (Y - FW), \tag{21}$$

条件:

$$e_m^T W = 1, \quad W \geq 0, \tag{22}$$

式中:  $J$  为残差阵;  $F$  为单一模型所获得的高程异

常矩阵;  $W$  为权阵;  $Y$  为理论真值阵。

$$e_m^T = (1, 1, \dots, 1), \tag{23}$$

这是一个二阶规划模型, 应用二阶规划理论可解得  $W$  阵为  $W^*$ , 相应的综合模型结果可表示为:

$$Y = FW^*. \tag{24}$$

4 有限元法与多面函数法的加权综合模型应用实例

4.1 唐山 GPS 试验网

测区面积约 170 km<sup>2</sup>, 全网共 31 个点, 最长边 23.5 km, 最短边 965 m, 平差后 GPS 网 15 个闭合环平均实测精度为  $2.26 \times 10^{-6}$ , 边长中误差均值为 0.85 cm, 边长相对中误差均值为  $1.79 \times 10^{-6}$ , 测角中误差均值为 0.65", 平面点位误差均值为 1.55 cm, 各种精度指标都优于城市三等网的精度要求。

网中 1~29 号各点均实测四等水准, 30, 31 号点未联测水准, 经过对 GPS 水准起始数据的检验, 28 号点含粗差, 因此 28, 30, 31 号点不参与计算。

有限元法、多面函数法及有限元法与多面函数法的加权综合模型计算出的高程异常拟合值及残差如表 1。

表 1 高程异常拟合值

Table 1 results of imitated abnormal height

| 点号       | 高程异常<br>值/m | 有限元拟<br>合值/m | 残差/mm | 多面函数<br>拟合值/m | 残差/mm  | 加权综合模<br>型拟合值/m | 残差/mm  |
|----------|-------------|--------------|-------|---------------|--------|-----------------|--------|
| 1        | 1.039       | 1.010        | -28   | 1.054 7       | 15. 7  | 1.030 1         | -8. 9  |
| 2        | 1.144       | 1.139        | -5    | 1.131 6       | -12. 4 | 1.135 7         | -8. 3  |
| 17       | 1.041       | 1.032        | -9    | 0.996 4       | -44. 6 | 1.016 0         | -25. 0 |
| 18       | 0.771       | 0.750        | -21   | 0.758 8       | -12. 2 | 0.754 0         | -17. 0 |
| 20       | 1.055       | 1.051        | -4    | 1.028 3       | -26. 7 | 1.040 8         | -14. 2 |
| 22       | 0.577       | 0.608        | 31    | 0.560 6       | -16. 4 | 0.586 7         | 9. 7   |
| 23       | 0.795       | 0.807        | 12    | 0.803 3       | 8. 3   | 0.805 3         | 10. 3  |
| 拟合中误差/mm |             |              | 18. 9 |               |        |                 | 14. 5  |

4.2 沿海某地 GPS 试验网

测区面积约 220 km<sup>2</sup>, 全网共 20 个点, 最长边 12.265 km, 最短边 2.219 km, 平差后 GPS 网中平面点位误差均值为 1.2 cm, 高程误差均值为 1.8 cm。

应用有限元法计算待求点 (1~8) 的高程异常时, 选用边界点为已知点 (9~20), 组成有限元三角形网格, 计算出的高程异常拟合值及残差如表 2, 多面函数法及有限元法与多面函数法的加权综合模型求出的高程异常拟合值及残差亦列于表 2。

5 结束语

目前, GPS 在国防交通、资源勘探、通讯、遥感及测量等领域的应用愈来愈普遍, 如何提高高程异常的逼近精度, 从而由大地高求出准确的正常高, 这一问题仍值得进一步的研究。

从大量的 GPS 试验和生产情况来看, GPS 高程的内符合精度一般可达  $2 \times 10^{-6}$  左右, 但若采用

表 2 高程异常拟合值及残差

Table 2 results of imitated abnormal height

| 点号       | 高程异常<br>值/ m | 有限元拟<br>合值/ m | 残差/mm | 多面函数<br>拟合值/m | 残差/ mm | 加权综合模<br>型拟合值/m | 残差/mm  |
|----------|--------------|---------------|-------|---------------|--------|-----------------|--------|
| 1        | 62 489       | 62 522        | 33    | 62 516        | 27     | 62 518 7        | 29 7   |
| 2        | 62 082       | 62 109        | 27    | 62 072        | — 10   | 62 088 9        | 6 9    |
| 3        | 62 075       | 62 064        | — 11  | 62 063        | — 12   | 62 063 5        | — 11 5 |
| 4        | 62 327       | 62 356        | 29    | 62 351        | 24     | 62 353 3        | 26 3   |
| 5        | 62 177       | 62 210        | 33    | 62 159        | — 18   | 62 182 3        | 5 3    |
| 6        | 62 196       | 62 214        | 18    | 62 234        | 38     | 62 224 9        | 28 9   |
| 7        | 62 598       | 62 556        | — 42  | 62 630        | 32     | 62 596 2        | — 1 8  |
| 8        | 62 514       | 62 535        | 21    | 62 528        | 14     | 62 531 2        | 17 2   |
| 拟合中误差/mm |              |               | 28. 3 |               |        |                 | 19 1   |

GPS 水准的单一模型来逼近高程异常曲面, 由于各种模型都有其应用的范围和条件, 因此有时拟合结果相差较大, 其拟合效果往往不稳定。笔者讨论了应用有限元法与多面函数法的加权综合模型来逼近高程异常曲面的方法, 从实际的计算数据可看出, 有限元法和多面函数法的加权综合模型的逼近结果高于有限元法或多面函数法的逼近结果。由于资料有限, 本方法尚需进一步地深入研究。

[ 参 考 文 献 ]

[ 1 ] H·莫里茨. 地球形状——理论大地测量学和地球内部物理学 [ M ]. 陈俊勇译. 北京: 北京测绘出版社, 1992

[ 2 ] Zhang Qin Liu Wan Lin. Finite Element Method in Determining Local

Geoid by using GPS leveling [ A ]. Zhang Zhenglu. International symposium on Current Crustal Movement and Hazare Reduction [ C ]. Wuhan: Seismological press, 1997, 441~ 451.

[ 3 ] 聂桂根. GPS 测高问题研究 [ D ]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1996.

[ 4 ] 黄立人, 陶本藻. 多面函数拟合在地壳垂直运动研究中的应用 [ J ]. 测绘学报, 1993, 22(1): 25~ 31.

[ 5 ] Q W. Liu, Y Q. Chen. Combining the Geodetic models of Vertical Crustal Deformation [ J ]. Journal of Geodetic, 1998, 7(2): 673~ 683.

[ 6 ] 刘万林, 张勤. 边界元法在 GPS 水准中的实验研究 [ J ]. 西北大学学报(自然科学版), 1999 29(6): 87~ 92

[ 7 ] 赵超英, 张勤. 地壳垂直形变场的综合逼近模型 [ J ]. 大地测量与地球动力学, 2003, 23(2): 42~ 46

[ 8 ] 王利, 刘万林. 应用 GIS 定位技术监测滑坡体垂直形变研究 [ J ]. 西安工程学院学报, 2002, 24(3): 61~ 65.

Combining model based on finite element method  
and multisurface function in GPS leveling

LIU Wan-lin, WANG Li, ZHAO Chao-ying

(School of Geological Engineering and Surveging Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, China)

**Abstract:** Combined Model on the basis of the Finite Element Method and Multisurface Function was used to improve approximating precision and reliability in modelling abnormal height surface. When geodetic height is used to calculate normal height, simple model of Finite Element Method or Multisurface Function was always used to approximate abnormal height surface. The results of those simple model of GPS leveling are often unstable. Through calculation and analysis to the practical surveying data, it can be seen that Combed Model was considerable improvement over simple models in approximating abnormal height curved surface. The results indicate that the combined model has value in transferring GPS height to normal height.

**Key words:** GPS leveling; finite element method; multisurface function; combed model

[ 英文审定: 钱会]