

# 单桩负摩阻力的双折线模型理论解

庄 宁<sup>1</sup>, 周小刚<sup>2</sup>, 赵法锁<sup>3</sup>

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2 上海市市政工程设计研究院, 上海 200092; 3. 长安大学 地质工程与测绘工程学院, 陕西 西安 710054)

[摘要] 基于荷载传递函数的概念, 提出了一种用双折线模型来计算桩负摩阻力的方法。根据单桩承载受力时桩侧土与桩尖土所处于不同的弹性和塑性状态, 运用该双折线模型, 建立桩身轴向力和桩土相对位移的微分方程, 得出桩相对位移解式, 再以此推导出桩轴向力、中性点位置和负摩阻力。

[关键词] 负摩阻力; 荷载传递; 简化模型; 单桩轴向力; 中性点

[中图分类号] TU473 [文献标识码] A [文章编号] 1672-6561(2006)01-0062-03

## Theoretical Solution of Single Pile's Negative Friction by Double Broken Line Model

ZHUANG Ning<sup>1</sup>, ZHOU Xiao gang<sup>2</sup>, ZHAO Fa suo<sup>3</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;  
2. Shanghai Municipal Engineering Design Institute, Shanghai 200092, China; 3. School of Geological Engineering and Surveying Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China)

**Abstract** Based on load transferring concept, this paper puts up a new method which uses double broken line model to calculate the negative friction of pile. The paper establishes the equation about the friction and relative displacement according to elastic or plastic condition that soil around or on the tip of the pile lies in by the double broken line model. The negative friction, the position of neutral point and axial force of single pile can be defined based on relative displacement.

**Key words** negative friction; loading transfer; simplified model; axial force of single pile; neutral point

## 0 引言

自 20 世纪 20 年代以来, 基于国内外对桩基承载特性研究的基础上<sup>[1-4]</sup>, 开始对负摩阻力开展了大量研究工作, 其中较经典的有 1965 年乔哈南森 (Johannessen) 和贝伦提出的有效应力计算负摩阻力的方法。1969 年, 普勒斯 (Poulos) 和马特斯 (Mattes) 基于明德林 (Mindlin) 解, 提出了弹性理论计算负摩阻力的方法。在原位现场试验方面, 李光煜<sup>[5]</sup> 利用滑动位移计成功地量测了一根钢管桩

的负摩阻力, 并用有效应力法进行了一些探讨。周国庆、杨维好<sup>[6]</sup> 对中砂融沉位移与单桩负摩阻力关系的试验进行了研究。马时冬<sup>[7]</sup> 通过现场测试, 给出了中性点的深度。由于影响负摩阻力的因素很多, 精确确定负摩阻力有很大难度。因此, 很多学者提出了一些计算负摩阻力的经验公式<sup>[8-9]</sup>, 并大多从有效应力出发提出经验公式, 如 Zeevaert 法、Bjerrum 法、Garlanger 法、Janbu 法等。

用简化模型法来确定负摩阻力可以克服试桩所面临的费时费工问题, 同时又能和实际参数相联系, 克服了传统的纯理论法的弊端, 即用理论分析

[收稿日期] 2005 04 11

[作者简介] 庄宁(1977-), 男, 江苏扬州人, 博士研究生, 从事隧道与地下结构研究。

和试验相结合的方法来确定桩的负摩阻力大小。

# 1 负摩阻力简化模型的建立

笔者用非线性弹簧力与位移的关系表示桩侧摩阻力与桩土之间相对位移的关系(即桩侧荷载传递函数)。桩底端的土也用一非线性弹簧代替,这一非线性弹簧的力与位移的关系表示桩端阻力与桩端沉降的关系(即桩端荷载传递函数),计算模型见图 1。

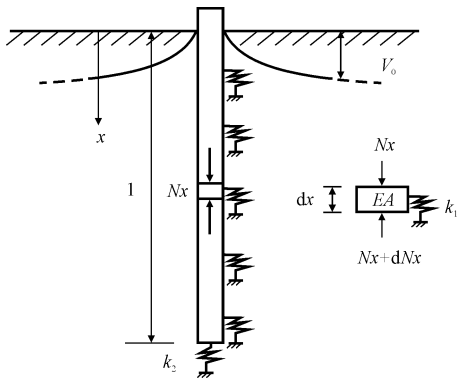


图 1 桩土计算模型

Fig. 1 Pile's Calculation Model

传递函数双折线硬化模型如图 2, 图中  $f_x$  为单位厚度土提供的摩阻力;  $z_x$  为桩土相对位移;  $z_u$  为桩周土弹性极限变形值;  $k_1$  和  $k_2$  为桩周土单位厚度土刚度系数。桩尖土反力也为双折线硬化模型如图 3, 图中  $R_1$  为桩尖土反力;  $k_3$  和  $k_4$  为桩尖土反力系数。

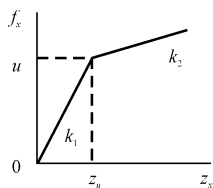


图 2 桩周土硬化模型  
Fig. 2 Harden Model  
Around the Pile

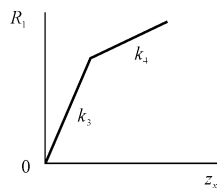


图 3 桩尖土硬化模型  
Fig. 3 Harden Model  
on the Tip of Pile

## 2 单桩负摩阻力求解

### 2.1 桩周土和桩尖土全部处于弹性阶段

当桩周和桩尖相对位移小于各自弹性位移极限值时, 桩周土和桩尖土处于弹性状态。在桩体上  $x$  深度处取一单元体如图 1。当该深度的土层由于固结产生沉降  $v(x)$  时, 即支撑弹簧的支座产生  $v(x)$  的沉降, 单元体受到的摩阻力  $f_x$  为

$$f_x dx = k_1 (u_x - v_x) dx = k_1 z_x dx$$

式中,  $u_x$  为桩截面  $x$  处的位移;  $z_x$  为桩土相对位

移, 两者满足以下平衡方程

$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} = k_1 z_x \quad (1)$$

式中:  $A$ ,  $E$  分别为桩身截面积和弹性模量。

桩顶边界条件对于实际工程条件为  $N_x|_{x=0} = P$  ( $P$  为桩顶荷载), 为了便于讨论及同一般的负摩阻力试验条件一致, 桩顶边界条件取  $P = 0$ , 若  $P \neq 0$  只是影响所得结果各系数的大小, 对推导过程并无影响, 则桩顶边界条件为

$$N_x|_{x=0} = -EA \frac{du_x}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2)$$

桩尖边界条件为

$$N_x|_{x=l} = -EA \frac{du_x}{dx} \Big|_{x=l} = -k_3 z_x|_{x=l} \quad (3)$$

根据边界条件式(2)及式(3), 解方程式(1)可得桩土相对位移方程

$$z(x) = \frac{m}{\alpha_1} (sh(\alpha_1 x) + \xi ch(\alpha_1 x))$$

### 2.2 桩周土部分进入塑性硬化阶段桩尖土处于弹性阶段

当桩相对位移较大, 继续增大荷载将会使桩周土由浅至深逐渐进入塑性状态, 桩头部分周围土体首先进入塑性阶段。设桩身弹性变形和塑性变形分界深度为  $h$ , 桩长为  $l$ 。

对于处于塑性阶段的桩体有

$$EA \frac{d^2 u_1}{dx^2} = k_2 (z_1 - z_u) + k_1 z_u \quad 0 < x \leq h(4)$$

式中:  $u_1$  为处于塑性阶段桩体任一截面处的位移;  $z_u$  为弹性极限位移;  $z_1$  为此时的相对位移。对于处于弹性阶段的桩体有

$$EA \frac{d^2 u_2}{dx^2} = k_1 z_2 \quad h < x \leq l \quad (5)$$

式中:  $u_2$  为处于弹性阶段桩体任一截面处的位移;  $z_2$  为相对位移。边界条件和连续条件为

$$-m + \frac{dz_1}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$-m + \frac{dz_2}{dx} \Big|_{x=l} = -\frac{k_3}{EA} z_2 \Big|_{x=l}$$

$$z_1|_{x=h} = z_2|_{x=h}, \quad \frac{dz_1}{dx} \Big|_{x=h} = \frac{dz_2}{dx} \Big|_{x=h}$$

据以上边界条件, 解方程式(4)及式(5)得桩相对位移为

$$z_1(x) = c_1 sh(\alpha x) + c_2 ch(\alpha x) + \frac{(\alpha_0^2 - \alpha_1^2)}{\alpha_0^2} z_u$$

$$z_2(x) = c_3 sh(\alpha x) + c_4 ch(\alpha x)$$

2.3 桩尖土部分进入塑性硬化阶段桩周土处于弹性阶段

桩尖土部分进入塑性硬化阶段,而桩周土处于弹性阶段,即桩尖土比桩周土先进入塑性阶段。此时处于弹性阶段的桩体部分方程为

$$-EA \frac{d^2 u_1}{dx^2} = k_1 z_1$$

桩顶边界条件取为

$$N_x|_{x=0} = -EA \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

桩尖边界条件为

$$N_x|_{x=l} = -EA \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=l} = k_3 z_b + k_4 (z_1 - z_b) \Big|_{x=l}$$

式中:  $u_1$  为桩身截面  $x$  处的位移;  $z_1$  为桩身处桩土相对位移;  $z_b$  为桩尖处弹性极限位移;  $k_1$  为桩周单位深度土的刚度系数;  $k_3, k_4$  为桩尖土弹性和塑性阶段反力系数。可解此时的桩土相对位移为

$$z_x = \frac{m}{\alpha_1} sh(\alpha_1 x) + \frac{(\alpha_4^2 - \alpha_3^2) z_b - m \frac{\alpha_4^2}{\alpha_1} sh\beta_1 + m - mch\beta_1}{\alpha_4^2 ch\beta_1 + \alpha_1 sh\beta_1} ch(\alpha_1 x)$$

2.4 桩周与桩尖土全部进入塑性硬化阶段

当桩周土弹性阶段较短,则桩周、桩尖土很快全部进入塑性阶段。对于处于塑性阶段的桩体可建立如下方程

$$-EA \frac{d^2 u_1}{dx^2} = k_2 (z_1 - z_u) + k_1 z_u \quad 0 < x \leq l$$

式中:  $u_1$  为处于塑性阶段桩体任一截面处的位移;  $z_u$  为桩身弹性极限位移。  $z_1$  为此时的相对位移。

桩顶边界条件为

$$-EA \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

桩尖边界条件为

$$EA \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=l} = -k_3 z_b - k_4 (z_2 - z_b) \Big|_{x=l}$$

式中:  $z_2$  为桩尖贯入位移。可解桩土相对位移

$$z_1(x) = c_1 sh(\alpha_2 x) + c_2 ch(\alpha_2 x) + \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2^2} z_u$$

由以上 4 种情况解得求负摩阻力的关键因素相对位移后可由公式

$$N_{(x)} = -EA \frac{du_x}{dx} = -EA \left( \frac{dz}{dx} - m \right)$$

求得桩身轴力。

正负摩阻力变换处的位置称为中性点,根据中

性点处桩与土的下沉相等,可令  $z(x) = 0$ ,求得中性点位置  $x$ 。再根据桩的荷载传递基本微分方程,对轴力从桩顶到中性点积分即可求得负摩阻力。

3 实例分析

实验资料取自香港地区某试验场桩基负摩阻力试验<sup>[10]</sup>,对桩身轴力进行了理论计算和实测值对比(图 4)。

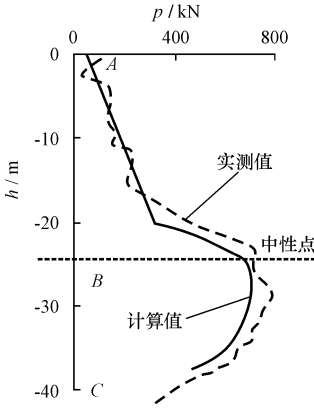


图 4 桩轴向力与深度关系曲线

Fig. 4 Relation Between Axial Force and Depth

4 结语

基于荷载传递函数法建立的单桩负摩阻力双折线模型,其物理概念清楚,过程简捷明了。在推导负摩阻力公式时,全面考虑了桩周土和桩端土所处的不同弹性和塑性状态,得出了在各种不同情况下桩土相对位移的解析式,并以此推出桩轴向力、中性点的位置以及负摩阻力。通过实例证明计算结果和实测值也较吻合,说明用该模型来计算单桩负摩阻力是可行的。

[ 参 考 文 献 ]

[ 1 ] Trochanis A M, Bielak J, Christiano P. Simplified Model for Analysis of One or Two Piles[ J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 117( 3): 448 - 466.  
[ 2 ] 姚海波,陈征宙,韦杰. 软岩嵌岩桩端阻力计算[ J]. 西安工程学院学报, 2002, 24( 1): 49 - 53.  
[ 3 ] 魏静,王建华,李永林. 西安地区单桩桩土相互作用数值模拟分析[ J]. 长安大学学报: 地球科学版, 2003, 25( 3): 63 - 66.  
[ 4 ] 何剑,陈文,曾金艳. 基桩承载特性的位移协调法分析研究[ J]. 长安大学学报: 地球科学版, 2003, 25( 2): 27 - 30.  
[ 5 ] 李光煜,汪彬. 钢管桩负摩阻力及水平位移的测定[ J]. 岩土力学, 1988, 9( 2): 90 - 97.  
[ 6 ] 周国庆,杨维好. 中砂融沉位移与单桩负摩阻力关系的试验研究[ J]. 中国矿业大学学报, 1999, 28( 6): 535 - 538.  
[ 7 ] 马时冬. 桩身负摩阻力的现场测试与研究[ J]. 岩土力学, 1997, 18( 1): 9 - 15.  
[ 8 ] 施建勇,赵维炳,周春儿. 钢桩负摩阻力分析[ J]. 岩土工程学报, 1995, 17( 2): 54 - 59.  
[ 9 ] 《桩基工程手册》编写委员会. 桩基工程手册[ K]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1995.  
[ 10 ] 周国林. 单桩负摩阻力传递机理分析[ J]. 岩土力学, 1991, 12( 3): 35 - 41.