

# 基于等分圆弧滑面土质边坡 的稳定性极限分析方法

王根龙<sup>1</sup>, 门玉明<sup>2</sup>, 陈志新<sup>2</sup>, 伍法权<sup>1</sup>, 祁生文<sup>1</sup>

(1. 中国科学院地质与地球物理研究所, 北京 100029; 2. 长安大学地质工程与测绘学院, 陕西 西安 710054)

**摘要:** 基于等分圆弧滑面的简化条件, 采用土塑性极限分析理论, 建立了土质边坡极限分析模型, 并推导得到了土质边坡稳定系数计算公式。该方法考虑了圆弧滑面的内能耗散率作用和边坡土体自重荷载、地震惯性力及孔隙水压力所做的外功率作用, 可以解决土质边坡稳定性分析问题, 是一种改进的土质边坡稳定性评价极限分析方法。

**关键词:** 土质边坡; 稳定性; 上限解; 虚功原理; 稳定系数; 极限分析

**中图分类号:** TU 413. 62 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6561(2007)02-0178-05

## Limit Analysis Method of Soil Slope Stability Based on Equidistant Circular Slip Surface

WANG Gen-long<sup>1</sup>, MEN Yu-ming<sup>2</sup>, CHEN Zhi-xin<sup>2</sup>, WU Fa-quan<sup>1</sup>, QI Sheng-wen<sup>1</sup>

(1. Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China;

2. School of Geological Engineering and Surveying, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China)

**Abstract** Based on the simplified assumption of equidistant circular slip surface, the model of limit analysis for soil slope stability can be established, the formula for computation of safety factor can be obtained when the theory of soil plasticity limit analysis is used. The method had considered not only the effect of the energy dissipation rate produced in the slip surface, but also the effect of the work rate produced by selfweight, seismic force and pore water pressure. It is a modified method of soil plasticity limit analysis and can be used to evaluate the stability of soil slope.

**Key words:** soil slope; stability; upper bound solution; virtual work-rate theorem; safety factor; limit analysis method

## 0 引言

土质边坡的稳定性分析方法概括起来可以分为工程地质分析方法、刚体极限平衡分析方法、数值方法和极限分析方法<sup>[1-2]</sup>, 此外, 概率方法和边坡动力分析方法也取得了很大发展。

极限分析方法与其他几种分析方法相比是一种较新的方法。最早由 Drucker 和 Prager 提出, 将静力场和运动场结合起来提出了极值原理, 从而建

立了土体极限分析理论, 为边坡极限分析方法开辟了新的途径<sup>[3]</sup>。此后, Chen W F 对极限分析法在边坡稳定性问题中的应用进行了探讨<sup>[4]</sup>; 陈祖煜研究了土质边坡塑性极限分析多楔体破坏机制, 并推导得到了上限解<sup>[5]</sup>; Donald I B and Chen Z Y 运用能量法和最优化原理, 得到了土质边坡和岩质边坡稳定性分析的上限解, 并编制了计算机程序 EMU 搜索极限状态时的最危险滑移面<sup>[6-7]</sup>。

极限分析法的基本思想是变形协调和塑性力

收稿日期: 2006-08-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(90302011)

作者简介: 王根龙(1974-), 男, 陕西华阴人, 博士研究生, 从事岩土工程与地质工程研究。E-mail: wgl14@mail.iggcas.ac.cn

学上限定理, 其核心是从功能平衡途径求解边坡稳定性稳定系数。笔者通过对极限分析法<sup>[8-9]</sup>进行改进, 提出了等分圆弧滑面的土质边坡极限分析方法, 并推导出在考虑土条自重、地震力和孔隙水压力 3 种工况条件下的稳定系数计算公式。

# 1 极限分析上限解原理<sup>[10-11]</sup>

## 1.1 极限分析上限定理的基本假定

理想刚塑性体和理想弹塑性体在荷载作用下, 当荷载达到某一数值并保持不变时, 物体将发生“无限”的变形, 或者说物体已进入塑性流动状态。在小变形的假设条件下, 通常所称的极限状态可以理解开始产生塑性流动时的瞬间状态, 此时的变形仍然是很小的。极限状态对应的荷载称为极限荷载。

由于在极限状态下应力场不变, 而应变率的弹性部分等于零, 所以在极限状态下, 物体只有塑性变形的增加。这表明在极限状态下, 理想刚塑性体与理想弹塑性体都有  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^p$  或  $d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^p$ , 即在极限状态下, 总应变率等于塑性应变率。因此, 在小变形条件下, 理想刚塑性体和理想弹塑性体得到的极限状态是一致的, 极限荷载也相同, 但变形不同。

在岩土工程中, 岩土材料通常采用 (Coulomb) 材料的屈服函数, 相应的岩土材料服从库仑屈服条件。库仑屈服函数有两种表达方式, 分别为

$$F = \tau - c - \sigma_n \tan \varphi \quad (1)$$

式中:  $c$  表示材料的粘聚力;  $\sigma_n$  表示法向应力;  $\tau$  表示剪应力;  $F$  表示屈服函数。

$$F = c \cos \varphi + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \sin \varphi - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (2)$$

式中:  $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$  分别表示最大主应力和最小主应力;  $\varphi$  表示材料的内摩擦角。

在塑性流动状态或屈服状态下, 根据土塑性理论可知, 屈服应力与塑性应变之间没有直接的关系。因此, 需要确定的不是应变, 而是应变率。屈服应力与相应的塑性应变率之间的关系可由库仑材料服从的相关联流动法则 (Associative Flow Rule) 确定。根据库仑材料屈服函数的两种表达方式, 屈服应力与相应的塑性应变率之间的关系也有两种表达方式, 分别为

$$\frac{\gamma^p}{\epsilon_n^p} = \frac{\partial F}{\partial \tau} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \quad (3)$$

式中:  $\gamma^p$  表示塑性应变率  $\epsilon$  的剪切应变率分量;  $\epsilon_n^p$  表示塑性应变率  $\epsilon$  的法向应变率分量。

将库仑材料的屈服函数式 (1) 代入式 (3) 可得

$$\frac{\gamma^p}{\epsilon_n^p} = \frac{1}{\tan \varphi} \quad (4)$$

$$\frac{\epsilon_1^p}{\epsilon_3^p} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} \quad (5)$$

式中:  $\epsilon_1^p$ 、 $\epsilon_3^p$  分别表示最大主应力  $\sigma_1$  和最小主应力  $\sigma_3$  对应的塑性应变率。

将库仑材料的屈服函数式 (2) 代入式 (5) 可得

$$\frac{\epsilon_1^p}{\epsilon_3^p} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (6)$$

由假设条件得到式 (4) 和式 (6), 可以说明库仑材料 (岩土材料,  $\varphi \neq 0$ ) 发生塑性流动时, 体积应变不等于零, 产生了剪胀现象。这种剪胀现象必然伴随着内能的耗散, 并且内能的耗散是由外力 (包括自重、地震力和孔隙水压力) 做功产生的。

## 1.2 虚功率方程

物体在极限荷载下产生的几何变形很小 (符合小变形的假设), 而小变形假设则意味着可以采用以速率形式表示的虚功方程——虚功率方程, 其公式可为

$$\int_{\Omega} W v^* d\Omega + \int_A T v^* dA = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^* d\Omega \quad (7)$$

式中:  $\Omega$  表示塑性变形区;  $A$  表示物体的边界;  $W$  表示物体的自重荷载;  $T$  表示作用在物体上的外荷载;  $v^*$  表示速度场;  $\sigma_{ij}^*$  表示应变率  $\epsilon_{ij}^*$  所对应的应变。

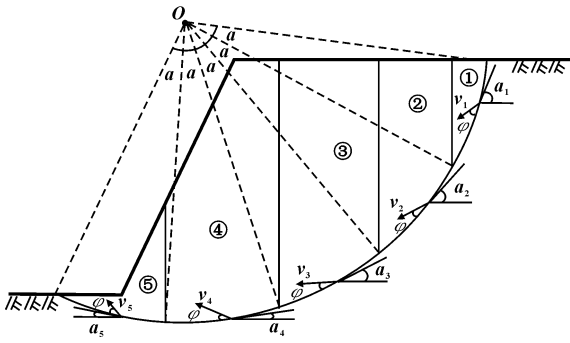
## 1.3 极限分析上限定理

极限分析上限定理的定义是在所有机动可能的速度场对应的荷载中, 极限状态的荷载是最小的一个, 或者说, 根据上限定理求得的荷载值是极限破坏状态荷载的一个上限值。由上限定理可知, 如果物体按某一形式破坏, 即存在内力功不比外力功大的变形状态。由于此时物体已经破坏, 由此所得的荷载一般为极限荷载的上限。在应用上限定理时, 一是先假定一个破坏速度场, 这样的速度场要求相邻条块的位移是协调的, 并且条块的移动不能导致其重叠或分离, 也就是说速度多边形要闭合; 二是要求外力在假定的速度场上做正功; 三是利用内力功与外力功相等的原理求出与破坏速度场对应的荷载。由此所得的荷载值不会小于真实的极限荷载。

2 等分圆弧滑面极限分析上限解

2.1 等分圆弧滑面极限分析上限解

根据极限分析上限定理, 可以建立等分圆弧滑面边坡模型(图 1)。由于各滑弧等长, 所以圆心角都相等, 记为  $\alpha$ 。在均质土坡的条件下, 各滑弧段的参数  $c$ 、 $\varphi$ 、 $l$  相等, 可以大大简化极限分析公式的推导, 并且可以直接和瑞典圆弧法进行计算结果比较。



①~⑤ 分别表示第 1 至第 5 个土条,  
 $\alpha_1 \sim \alpha_5$  为第 1 至第 5 个土条滑弧倾角

图 1 等分圆弧滑面边坡模型

Fig 1 Model for Slope with Equidistant Circular Slip Surface

极限分析上限定理假定各土条是刚塑性体, 所以在边坡变形破坏过程中, 土条内部没有能量的耗散, 能量的耗散只发生在滑面上。依据变形协调和机动可能速度场理论, 可以得到相邻土条的速度递推公式

$$v_i = v_{i-1} \frac{\cos(\varphi - \alpha_{i-1})}{\cos(\varphi - \alpha_i)} \tag{8}$$

等分圆弧的条件使得各相邻滑弧的倾角具有等差数列规律, 即  $\alpha_i = \alpha_1 - (i - 1)\alpha$ , 联立公式(8), 可以表示为第 1 个土条速度  $v_1$  和土条滑弧倾角  $\alpha_1$  的表达式

$$v_i = v_1 \frac{\cos(\varphi - \alpha_1)}{\cos(\varphi - \alpha_i)} = v_1 \frac{\cos(\varphi - \alpha_1)}{\cos[\varphi - \alpha_1 + (i - 1)\alpha]} \tag{9}$$

2.2 上限解推导

为了得到土质边坡极限分析上限解的稳定系数公式, 需要根据外部作用荷载、土体自重所做的外功率与滑面塑性变形区的内部能量耗损率相等的条件——虚功率原理, 建立起边坡处于极限状态的虚功率方程。作用于土质边坡的荷载包括自重荷载、地震惯性力和孔隙水压力。地震惯性力主要考虑水平分量, 可以采用拟静力法计算不同

烈度的水平地震惯性力。孔隙水压力是一种特殊的外部作用荷载, 其影响也是一个很重要的因素(图 2), 当知道地下水位线分布后, 滑面上的孔隙水压力也可以通过计算得到。由土体自重  $W$ 、水平地震惯性力  $E$ 、孔隙水压力  $u$  所做的外功率计算为

$$W_{ext} = \sum_{i=1}^n W_i v_i \sin(\alpha_i - \varphi) + \sum_{i=1}^n E_i v_i \cos(\alpha_i - \varphi) + \sum_{i=1}^n u_i v_i l \sin \varphi \tag{10}$$

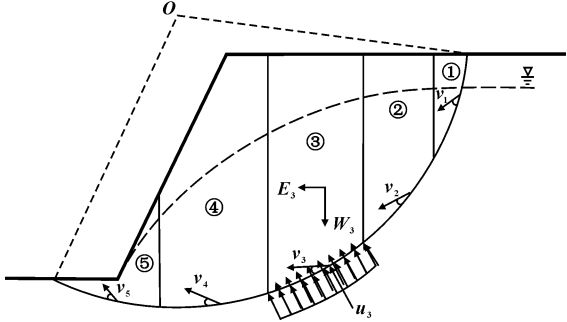


图 2 外荷载分布

Fig 2 Distribution of External Loads

在土条为刚塑性体的假设条件下, 土条内部没有能量耗损, 这样边坡变形破坏过程中能量的耗散主要发生在滑面上, 其计算为

$$D_{int} = \sum_{i=1}^n l c v_i \cos \varphi \tag{11}$$

虚功率方程是建立在边坡临界极限状态条件下的, 为了使边坡处于临界破坏状态, 可以采用超载系数的方法, 即假定坡体力学参数不变的前提下, 逐级增加荷载, 通过计算土质边坡临界失稳对应荷载与正常工作荷载之比来推求稳定系数。这个过程可用公式  $F W_{ext} = D_{int}$  表示, 联系式(10)和式(11), 可以得到等分圆弧滑面土质边坡极限分析法稳定系数公式

$$F = \left[ \sum_{i=1}^n l c v_i \cos \varphi / \sum_{i=1}^n W_i v_i \sin(\alpha_i - \varphi) \right] + \left[ \sum_{i=1}^n l c v_i \cos \varphi / \sum_{i=1}^n E_i v_i \cos(\alpha_i - \varphi) \right] + \left( \sum_{i=1}^n l c v_i \cos \varphi / \sum_{i=1}^n u_i v_i l \sin \varphi \right) \tag{12}$$

式(12)右边分子和分母中都含有  $v_i$ , 因此可以用式(9)表示为  $v_1$  后, 然后消除掉所有的速度项。考虑土质边坡在自重荷载、自重荷载+水平地震力、自重荷载+孔隙水压力 3 种工况, 则可以推导出各自的稳定系数计算公式(表 1)。

表 1 不同工况条件下稳定系数表达式

Tab. 1 Formulas of Safety Factor in Different Working Conditions

序号	工况条件	稳定系数计算公式
1	自重荷载	$F = \frac{lc \cos \varphi \sum_{i=1}^n \sec \beta_i}{\sum_{i=1}^n W_i \tan \beta_i}$
2	自重荷载+水平地震力	$F = \frac{lc \cos \varphi \sum_{i=1}^n \sec \beta_i}{\sum_{i=1}^n W_i (\tan \beta_i + k_h)}$
3	自重荷载+孔隙水压力	$F = \frac{lc \cos \varphi \sum_{i=1}^n \sec \beta_i}{\sum_{i=1}^n W_i \tan \beta_i + l \sin \varphi \sum_{i=1}^n u_i \sec \beta_i}$

注:  $\beta_i = \alpha_1 - (i-1)\alpha - \varphi$ ;  $k_h$  表示水平地震影响系数, VII、VIII、IX度为地震烈度, 分别取 0.1、0.2、0.4

3 算例分析

应用 Fredlund D G, Krahn J<sup>[12]</sup> 的一个典型土质边坡为例, 土的物理参数为: 粘聚力 29 kPa, 内摩擦角 20°, 重度 18.8 kN · m<sup>-3</sup>, 坡面坡度为 1 : 2, 验算滑面取圆弧, 圆心坐标为 (16.1, 27.54), 采用等分圆弧分条, 共分 10 个土条, 每个土条对应圆心角和弧长分别为 9.7°和 4.13 m。计算剖面的几何和力学模型如图 3、4, 参数选取见表 2。

采用本文方法, 在不考虑地震作用和考虑不同烈度地震作用下, 用笔者所编计算机程序对该边坡进行稳定性计算, 稳定系数计算结果见表 3。

在天然状态条件下, 运用等分圆弧滑面土质边坡极限分析法计算得到的稳定系数为 2.120, 比其他 2 种方法计算结果略大, 但是相差仅为 1%~2%。

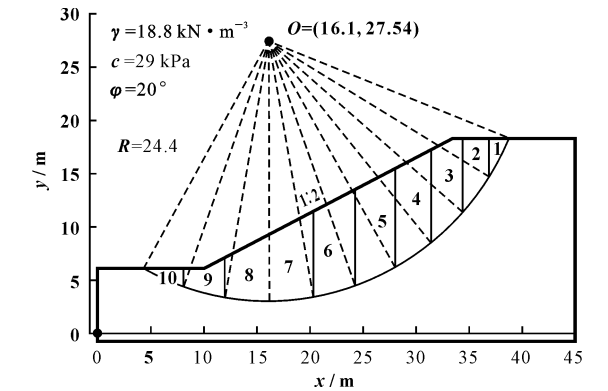


图 3 验算剖面的几何模型

Fig. 3 Geometrical Model of Computation Profile

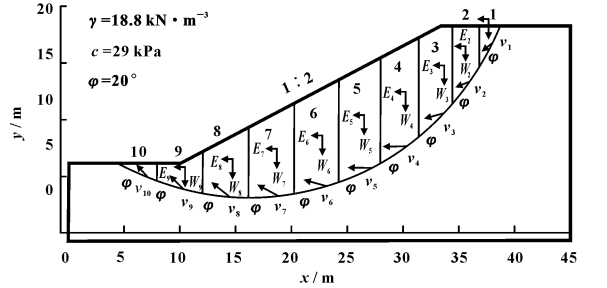


图 4 验算剖面的力学模型

Fig. 4 Mechanical Model of Computation Profile

表 2 验算剖面数据

Tab. 2 Data of Computation Profile

分条号	面积/ m <sup>2</sup>	重度/ (kN · m <sup>-3</sup> )	条块质量/ (kN · m <sup>-1</sup> )	粘聚力/ kPa
1	3.677 15	18.8	69.130 42	29
2	13.350 09	18.8	250.981 7	29
3	24.459 03	18.8	459.829 7	29
4	31.241 56	18.8	587.341 3	29
5	34.831 48	18.8	654.831 8	29
6	34.393 83	18.8	646.604	29
7	29.618 99	18.8	556.836 9	29
8	20.865 21	18.8	392.266	29
9	10.293 42	18.8	193.516 3	29
10	3.419 247	18.8	64.2818 4	29

分条号	内摩擦角/ (°)	等分弧长/ m	等分弧圆心角/ (°)	等分弧倾角/ (°)	$\beta_i$
1	20	4.13	9.7	63.0	43.0
2	20	4.13	9.7	53.3	33.3
3	20	4.13	9.7	43.6	23.6
4	20	4.13	9.7	33.9	13.9
5	20	4.13	9.7	24.2	4.2
6	20	4.13	9.7	14.5	-5.5
7	20	4.13	9.7	4.8	-15.2
8	20	4.13	9.7	-4.9	-24.9
9	20	4.13	9.7	-14.6	-34.6
10	20	4.13	9.7	-24.3	-44.3

表 3 稳定系数计算结果对比

Tab. 3 Calculating Results of Safety Factor

序号	计算方法	稳定系数	计算条件
1	Morgenstern-Price 法	2.096	不考虑地震作用
2	Spencer 法	2.079	不考虑地震作用
3	等分圆弧滑面土质边坡极限分析法	2.120	不考虑地震作用
		1.607	VII度地震烈度
		1.294	VIII度地震烈度
		0.931	IX度地震烈度

因为该方法公式推导的原理是极限分析上限定理, 计算结果只是稳定系数的一个上限值, 所以结论值略大是合理的。3 种方法的计算结果均显示, 该验算剖面在天然状态条件下, 整体上是稳定的。在考

考虑地震作用影响时,当选取烈度为Ⅶ度时,稳定系数计算结果为 1.607,Ⅶ度时下降为 1.294,Ⅸ时仅为 0.931<1.0,说明边坡在Ⅸ度烈度条件下会产生失稳破坏。作为一种新的计算方法,其适用性和有效性尚需要今后在实际应用中验证和完善。

## 4 结语

等分圆弧极限分析方法对土质边坡极限分析法做了有意义的改进,使塑性极限分析理论解决土质边坡稳定性问题变得较为简洁实用。特别需要指出的是,该方法假定土体材料为刚塑性体,运用极限分析上限定理,以等分圆弧滑面作为指导思想,实现了公式推导的简化。在考虑自重荷载、自重荷载+水平地震力、自重荷载+孔隙水压力 3 种不同工况条件下,分别推导得到了相应的稳定系数计算公式。算例与经典 Spencer 法、Morgenstern-Price 法的计算结果对比显示,该方法用于计算土质边坡稳定系数具有一定的实用性及应用前景。

### 参考文献:

[ 1 ] 赵法锁,宋飞,王艳婷,等.基于 GIS 的略阳县地质环境质量评价[ J ].地球科学与环境学报,2006,28(1):88-93.

[ 2 ] 何清雨,陈征宙,周心经,等.三峡库区马家屋场一后坪滑坡

成因及稳定性分析[ J ].地球科学与环境学报,2005,27(4):19-23.

[ 3 ] Drucker D C, Prager W. Soil Mechanics and Plastic Analysis of Limit Design[ J ]. Quarterly of Applied Mathematics, 1952, 10(2): 157-165.

[ 4 ] 陈惠发.极限分析与土体塑性[ M ].北京:人民交通出版社,1995.

[ 5 ] 陈祖煜.土质边坡稳定分析——原理·方法·程序[ M ].北京:中国水利水电出版社,2003.

[ 6 ] Donald I, Chen Z Y. Slope Stability Analysis by the Upper Bound Approach: Fundamentals and Methods[ J ]. Canadian Geotechnical Journal, 1997, 34(11): 853-862.

[ 7 ] Chen Z Y, Donald I. Comparison between the Limit Equilibrium and Limit Analysis Method[ C ] // Proceedings of the 10th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Beijing: International Academic Publisher, 1995.

[ 8 ] 王根龙,门玉明,陈志新,等.土坡稳定性塑性极限分析条分法[ J ].长安大学学报:自然科学版,2002,22(4):28-30.

[ 9 ] 王根龙.土坡稳定性塑性极限分析条分法及可靠性研究[ D ].西安:长安大学,2002.

[ 10 ] 龚晓南.土塑性力学[ M ].杭州:浙江大学出版社,1997.

[ 11 ] 李广信.高等土力学[ M ].北京:清华大学出版社,2004.

[ 12 ] Fredlund D G, Krahn J. Comparison of Slope Stability Methods of Analysis[ J ]. Canada Geotechnical Journal, 1977, 14(3): 429-439.

(上接第 169 页)

### 参考文献:

[ 1 ] 汤良杰,金之钧,张明利,等.柴达木盆地构造古地理分析[ J ].地学前缘,2000,7(4):421-429.

[ 2 ] 刘洛夫.柴达木盆地东部地区烃源岩的生源与沉积环境[ J ].古地学报,2001,3(2):82-91.

[ 3 ] 党玉琪,胡勇,余辉龙,等.柴达木盆地北缘石油地质[ M ].北京:地质出版社,2003.

[ 4 ] 李侠.阿尔金构造带形成机制探讨[ J ].长安大学学报:地球

科学版,2003,25(1),7-10.

[ 5 ] 王新宇,李盛富,鄢全树.柴北缘沙柳河榴辉岩岩石化学及变质条件研究[ J ].地球科学与环境学报,2005,27(1):14-19.

[ 6 ] 顾树松.中国石油地质志(14)[ M ].北京:石油工业出版社,1990.

[ 7 ] Perrodon A. Petroleum Systems Models and Applications[ J ]. Journal of Petroleum Geology, 1992, 15(3): 319-326.

[ 8 ] 万天丰.中国大地构造学纲要[ M ].北京:地质出版社,2004.