

Kalman 滤波几种异常检验法

聂建亮¹, 吴富梅²

(1 长安大学 地质工程与测绘学院, 陕西 西安 710054; 2 信息工程大学 测绘学院, 河南 郑州 450052)

摘要: 为了检测动态导航观测异常和动力学模型异常, 采用预测残差构造观测误差和动力学模型误差整体检验法, 对观测异常可分别采用以模型为准的观测异常检验、以当前历元可靠观测为基准的异常检验或以 Kalman 滤波估值为基础的异常检验的方法; 对于动力学模型异常检验, 可以分别采用状态不符值检验法、以状态参数 Kalman 滤波估值为基础的动力学模型异常检验或以可靠观测为基础的动力学模型误差整体检验的方法。分析了以上几种检验方法的特点, 并用实测数据进行了检验。结果表明: 在观测异常或动力学模型异常处, 异常检验对导航数据精度有一定程度地提高。

关键词: 观测异常; 动力模型异常; 异常检验; Kalman 滤波

中图分类号: P207⁺1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6561(2008)02-0204-05

Methods for Outlier Detection of Kalman Filtering

NIE Jian-liang¹, WU Fu-mei²

(1 School of Geological Engineering and Surveying, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China;

2 School of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, Henan, China)

Abstract In order to detect the outliers of measurements and dynamic models, the predicted residual vector is used to construct methods to the integral error detection of measured outliers and dynamic model error. There are three types of statistics, that is, the outlier detection based on the credible observation, the reliable measurements at present epoch, and the estimations of Kalman filtering respectively. For the discrepancies of states, the estimations of Kalman filtering and the reliable measurements are used to detect dynamic model error. These methods are compared and analyzed with the data of navigation. It is proved that the outlier detection can improve the precision when measurement outliers or dynamic model errors exist.

Key words: measurement outliers; dynamic model error; outlier detection; Kalman filtering

0 引言

动态 Kalman 滤波异常检验不同于静态数据检验。首先, 动态 Kalman 滤波的多余观测数据较少; 其次, 动态滤波对实时性要求较高; 再次, 滤波异常不仅涉及观测异常, 还可能有动力学模型异常, 很难确定由某一种或者两种异常造成滤波异常。

对于动态 Kalman 滤波的异常探测已经积累了丰富的研究成果, 有探测、诊断、修复方法, 即

DIA 方法^[1-3]、动态系统的模型误差实时修正法^[4]、Kalman 滤波误差识别法^[5]、针对粗差的自适应 Kalman 滤波^[6]及针对动态 GPS 周跳的探测法^[7-8]。在 Kalman 滤波的异常影响控制方面, 提出了抗差 Kalman 滤波法^[9-10]和自适应抗差滤波法^[11-12]等。

基于整体误差检验法、3 种观测异常检测法和 3 种动力学模型异常检测方法^[13], 笔者详细讨论了对观测异常和动力学模型异常的检测方法。

收稿日期: 2007-10-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(40274002; 40474001); 地球空间环境与大地测量教育部重点实验室项目(1469990324233-04-11)

作者简介: 聂建亮(1979-), 河南新乡人, 博士研究生, 从事测量数据处理研究。E-mail: nj101@163.com

1 整体检验

整体检验主要是检验观测模型和动力学模型的整体误差是否超限, 其检验统计量由观测残差和状态预测残差的二次型表示^[5, 12]

$$T_k = \mathbf{V}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{V}_k + \mathbf{V}_{\bar{X}_k}^T \mathbf{P}_{\bar{X}_k} \mathbf{V}_{\bar{X}_k} \quad (1)$$

式中: \mathbf{P}_k 、 $\mathbf{P}_{\bar{X}_k}$ 分别为观测权矩阵和状态向量预报值 \bar{X}_k 对应的权阵; \mathbf{V}_k 为观测向量 \mathbf{L}_k 的观测残差; $\mathbf{V}_{\bar{X}_k}$ 为状态预测向量 \bar{X}_k 的状态预测残差, 其表达式分别为

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{X}_k - \mathbf{L}_k \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_{\bar{X}_k} = \mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_k \quad (3)$$

式中: $\bar{\mathbf{X}}_k$ 、 \mathbf{X}_k 分别为状态向量 \mathbf{X} 的估计向量和预测向量; \mathbf{A}_k 为设计矩阵。

实际计算中, 通常将预测残差 $\bar{\mathbf{V}}_k$ 作为构造统计量的基础, 其表达式为

$$\bar{\mathbf{V}}_k = \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k - \mathbf{L}_k \quad (4)$$

$\bar{\mathbf{V}}_k$ 对应的协方差矩阵为

$$\Sigma_{\bar{\mathbf{V}}_k} = \mathbf{A}_k \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{A}_k^T + \Sigma_k \quad (5)$$

式中: Σ_k 、 $\Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k}$ 分别为观测向量的协方差矩阵和状态预测向量的协方差矩阵。

将式(4)代入滤波解方程

$$\mathbf{X}_k = \bar{\mathbf{X}}_k - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{V}}_k \quad (6)$$

式中: \mathbf{K}_k 为增益矩阵

$$\mathbf{K}_k = \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{A}_k^T (\mathbf{A}_k \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{A}_k^T + \Sigma_k)^{-1} \quad (7)$$

把式(6)代入式(2)

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{V}}_k - \mathbf{L}_k = \Sigma_k \Sigma_{\bar{\mathbf{V}}_k}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_k \quad (8)$$

把式(6)代入式(3)

$$\mathbf{V}_{\bar{X}_k} = \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{V}}_k \quad (9)$$

将式(9)~(7)和式(5)代入式(1)

$$T_k = \mathbf{V}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{V}_k + \mathbf{V}_{\bar{X}_k}^T \mathbf{P}_{\bar{X}_k} \mathbf{V}_{\bar{X}_k} = \bar{\mathbf{V}}_k^T \Sigma_{\bar{\mathbf{V}}_k}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_k \quad (10)$$

以上公式的具体推导可见文献[13]。

令 $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{V}}_k} = \Sigma_{\bar{\mathbf{V}}_k}^{-1}$, 则式(10)改为

$$T_k = \bar{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{V}}_k} \bar{\mathbf{V}}_k \quad (11)$$

构造整体误差检验统计量

$$\frac{T_k}{\sigma_0^2} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{V}}_k} \bar{\mathbf{V}}_k}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n_k - m_k) \quad (12)$$

平差后, 计算单位权中误差的估值

$$\sigma_{0k}^2 = \frac{\bar{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{V}}_k} \bar{\mathbf{V}}_k}{n_k - m_k} \quad (13)$$

式中: n_k 、 m_k 分别为观测个数和状态向量参数个数。

在显著性水平 α 下, 检验假设

$$H_0 : E(\sigma_{0k}^2) = \sigma_0^2 \quad (14)$$

$$H_1 : E(\sigma_{0k}^2) > \sigma_0^2$$

整体误差检验只能对观测模型和动力学模型进行总体评价, 但是不能准确确定误差的类型。若接受 H_0 , 说明 Kalman 滤波没有异常; 若拒绝 H_0 , 误差检验就非常复杂, 首先判断是观测异常还是动力学模型异常, 然后再确定异常位置。

2 观测异常检验

2.1 以模型为基准的观测异常检验

假设动力学模型可靠, 则状态预测向量 $\bar{\mathbf{X}}_k$ 可靠, 预测残差向量 $\bar{\mathbf{V}}_k$ 主要反映观测量 \mathbf{L}_k 的误差信息, 构造统计量

$$W_k = \frac{\bar{V}_{k_i}}{\sigma_{\bar{V}_{k_i}}} \sim N(0, 1) \quad (15)$$

式中: $\sigma_{\bar{V}_{k_i}}$ 为 $\Sigma_{\bar{\mathbf{V}}_k}$ 对角线第 i 个元素的平方根, 若在置信水平 $(1-\alpha)$ 上, W_k 未超限, 则 \mathbf{L}_k 的第 i 个观测量没有异常。

2.2 以当前历元可靠观测为基准的观测异常检验

若在 t_k 时刻有多余观测量, 则可以得到该时刻的状态参数估计值

$$\tilde{\mathbf{X}}_k = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k)^{-1} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{L}_k \quad (16)$$

相应的协方差矩阵为

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{X}}_k} = \sigma^2 (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k)^{-1} \quad (17)$$

则残差向量 $\tilde{\mathbf{V}}_k$ 为

$$\tilde{\mathbf{V}}_k = \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{X}}_k - \mathbf{L}_k \quad (18)$$

则统计量为

$$T_k = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{P}_k \tilde{\mathbf{V}}_k}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n_k - m_k) \quad (19)$$

式中: n_k 、 m_k 分别为 t_k 时刻观测个数与参数个数。若 T_k 超限, 表示观测向量中含有异常误差, 然后用 Baarda 数据探测法确定粗差位置, 即

$$W_k = \frac{\tilde{V}_{k_i}}{\sigma_{\tilde{V}_{k_i}}} \sim N(0, 1) \quad (20)$$

式中: $\sigma_{\tilde{V}_{k_i}}$ 为协方差阵 $\Sigma_{\tilde{\mathbf{V}}_k}$ 对角线第 i 个元素的平方根。 $\Sigma_{\tilde{\mathbf{V}}_k}$ 的表达式为

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{V}}_k} = \Sigma_k - \mathbf{A}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{X}}_k} \mathbf{A}_k^T \quad (21)$$

2.3 以 Kalman 滤波估值为基础的观测异常检验

在整体检验被拒绝的情况下, 可以直接用

Baarda 数据探测法对观测值进行检验。统计量为

$$W_k = \frac{V_{k_i}}{\sigma_{V_{k_i}}} \sim N(0, 1) \quad (22)$$

式中: $\sigma_{V_{k_i}}$ 为 Σ_{V_k} 对角线第 i 个元素的平方根。 Σ_{V_k} 为

$$\Sigma_{V_k} = \Sigma_k - A_k \Sigma_{X_k} A_k^T \quad (23)$$

基于状态参数 Kalman 滤波估值对观测异常检验, 可靠性较差, 因为滤波解中可能有混合误差, 即含有观测误差和动力学模型误差双重影响, 所以异常检验的结果只能作为参考。

以 Kalman 滤波估值为基础的观测异常检验结合动力学模型异常, 对动力学模型的可靠性有一定程度提高, 进而提高检验的可靠性, 其检验步骤为: 若整体检验被拒绝, 首先对 Kalman 滤波的动力学模型进行检验(状态不符值比较法和基于整体状态滤波解检验法), 当检验出本历元的动力学模型有异常时, 将滤波解代替预报值进行迭代计算本历元的滤波解, 并进行下一次的动力学模型异常检验, 多次迭代。若检验不到动力学模型异常, 然后进行以状态参数 Kalman 滤波估值为基础的观测异常检验。这种方法虽然不能完全消除异常, 但可以减小异常对滤波解的影响。

3 动力学模型异常检验

3.1 状态不符值检验法

设 t_k 时刻有多余观测量, 根据最小二乘法计算状态参数几何解 \bar{X}_k , 由动力学模型得到状态预测向量 \bar{X}_k , 则两参数的差值为

$$\Delta \bar{X}_k = \bar{X}_k - \bar{X}_k \quad (24)$$

构造统计量

$$W_k = \frac{\Delta \bar{X}_k}{\sigma_{\Delta \bar{X}_k}} \sim N(0, 1) \quad (25)$$

式中: $\sigma_{\Delta \bar{X}_k}$ 为 $\Delta \bar{X}_k$ 对应的协方差阵的对角线第 i 个元素的平方根。 $\Delta \bar{X}_k$ 对应的协方差阵为

$$\Sigma_{\Delta \bar{X}_k} = [\sigma_0^2 (A_k^T P_k A_k)^{-1} + \Sigma_{\bar{X}_k}] \quad (26)$$

3.2 基于整体状态 Kalman 滤波解的检验

假设已经得到状态残差 $V_{\bar{X}_k}$, 若整体检验被拒绝, 则检验动力学模型其统计量为

$$W_k = \frac{V_{\bar{X}_k}}{\sigma_{V_{\bar{X}_k}}} \sim N(0, 1) \quad (27)$$

式中: $\sigma_{V_{\bar{X}_k}}$ 由下式可得

$$\sigma_{V_{\bar{X}_k}} = \sqrt{(\Sigma_{V_{\bar{X}_k}})_{ii}} \quad (28)$$

其中 $\Sigma_{V_{\bar{X}_k}} = \Sigma_{\bar{X}_k} - \Sigma_{X_k}$ (29)

$V_{\bar{X}_k}$ 中不仅含有动力学模型误差, 而且含有观测误差, 因此可靠性有一定的问题。

3.3 以可靠观测为基础的误差整体检验

若观测可靠, $\bar{V}_k^T P_{\bar{V}_k} \bar{V}_k$ 主要反映动力学模型的误差, 若观测精度较高, 可以用 $\bar{V}_k^T P_{\bar{V}_k} \bar{V}_k$ 构造统计量

$$T_k = \frac{\bar{V}_k^T P_{\bar{V}_k} \bar{V}_k}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n_k - m_k) \quad (30)$$

若统计量被拒绝, 则说明动力模型含有异常, 但不能检验到状态参数向量的哪个分量有异常。

另一类整体检验方法是基于导航解 \bar{X}_k , 使用式(16)计算得到 $\Delta \bar{X}_k$, 并组成二次型

$$T_k = \frac{\Delta \bar{X}_k^T P_{\bar{X}_k} \Delta \bar{X}_k}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n_k - m_k) \quad (31)$$

这种检验方法也只能检验整体异常, 不能判断状态向量分量异常。

4 算例分析

算例所用数据为一组机载动态 GPS 实测数据, 采集于 1996 年 9 月 20 日, 有 2 台 Trimble 4000 SSE 型接收机, 1 台固定在参考站, 1 台安置在飞机上。经过约 10 min 的初始化后, 飞机起飞, 飞行时间约 90 min。算例中, 位置、速度、C/A 码的初始方差分别为 0.2 m^2 、 $9 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ 、 1 m^2 。此处动力学模型用常速度模型, 其中速度的谱密度为 $0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, 采样间隔为 1.0 s。检验前单位权中误差为 $\pm 1.0 \text{ m}$ 。每间隔 500 个历元, 在 C/A 码双差观测量的第 1 个观测值上加上 10 m 的观测异常。

在异常检测中, 首先判断整体误差是否超限, 在整体检验过程中, $\chi^2(n_k - m_k)$ 分布的置信水平为 0.05; 若整体误差超限, 再对观测模型或动力学模型进行检验, 在检验观测分量或动力模型分量时, 标准正态分布的置信水平为 0.03。

采用以 6 种方案对数据进行处理: ①标准 Kalman 滤波(没有异常检验); ②以模型为基准的观测异常检验; ③当前历元可靠观测为基准的观测异常检验; ④以 Kalman 滤波估值为基础的观测异常检验与状态不符值检验法的结合; ⑤状态不符值检验

法; ⑥以状态参数 Kalman 滤波估计值为基础的
动力学模型异常检验。方案①~⑥处理后的数据分
别进行滤波解的计算, 结果见图 1~6 和表 1。

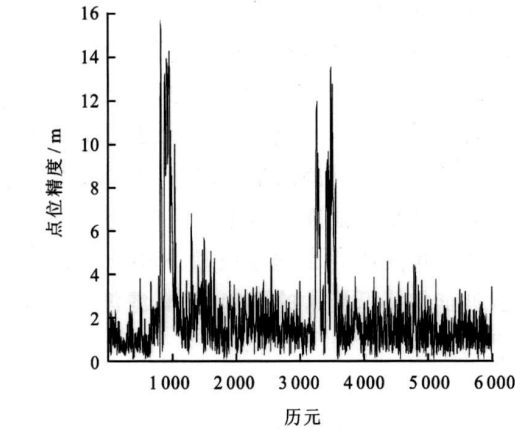


图 1 原始数据误差

Fig. 1 RMS of the Raw Datum

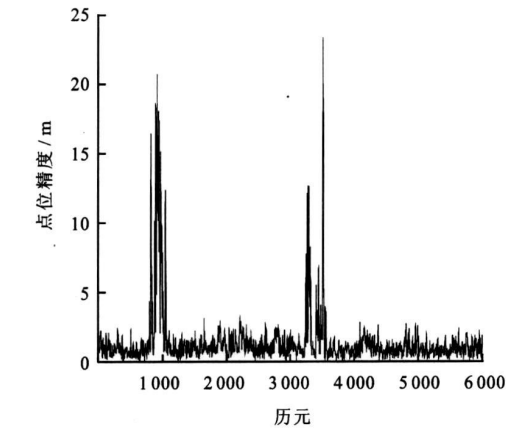


图 2 以模型为基准的观测异常检验

Fig. 2 RMS of Outlier Detection
Based on the Credible Observation

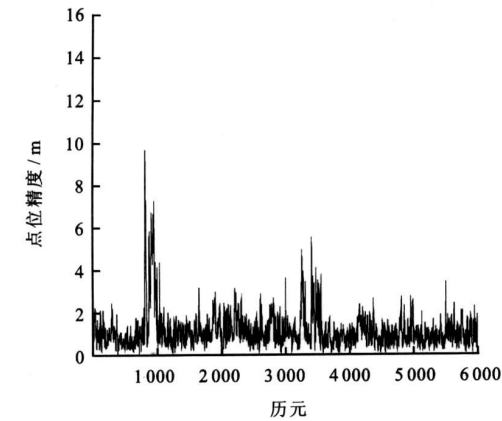


图 3 当前历元可靠观测为基准的异常检验

Fig. 3 RMS of Outlier Detection Based on
the Reliable Measurements at Present Epoch

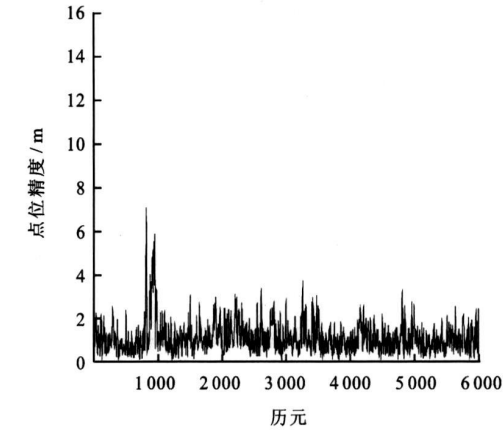


图 4 以 Kalman 滤波估值为基础的观测
异常检验与状态不符值检验法的结合

Fig. 4 RMS of Outlier Detection Based on the Estimates
of Kalman Filtering with the Discrepancies of States

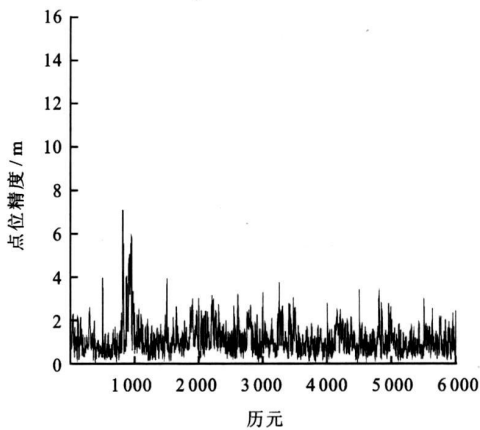


图 5 状态不符值检验法

Fig. 5 RMS of Outlier Detection
Based on the Discrepancies of States

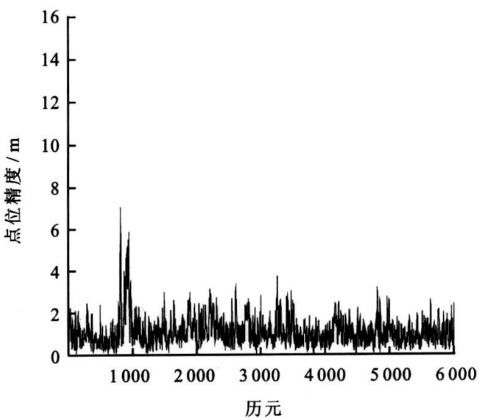


图 6 以状态参数 Kalman 滤波估计
值为基础的动力学模型异常检验

Fig. 6 RMS of Outlier Detection Based
on the Estimates of Kalman Filtering

表 1 各种方案的均方误差和最大误差

Tab. 1 Comparison of RMS and MAX of Schemes

	方案	X 轴/ m	Y 轴/ m	Z 轴/ m
均方差	①	1 524	1 511	1 950
	②	1 430	1 030	1 876
	③	0 800	0 761	0 910
	④	0 698	0 614	0 909
	⑤	0 701	0 615	0 903
	⑥	0 701	0 615	0 903
最大误差	①	11 739	13 457	12 755
	②	17 147	9 043	19 463
	③	6 128	9 029	4 033
	④	4 178	6 884	3 072
	⑤	4 298	6 871	3 162
	⑥	4 298	6 871	3 162

分析上述结果, 可以看出:

- (1)在大约 1 000 和 3 000 历元左右, 载体有 2 处明显扰动, 这 2 次扰动对标准 Kalman 滤波和以模型为准的观测异常检验有明显影响(图 1~2); 由于观测值中加入了异常标准 Kalman 滤波也在一定程度上受到观测异常影响(图 1)。
- (2)基于方案③~⑥的 Kalman 滤波异常检验, 其最终滤波解算精度比标准 Kalman 滤波有所提高, 特别在载体扰动处, 这说明方案③~⑥对 Kalman 滤波异常检验的可行性和有效性。
- (3)方案②对 Kalman 滤波异常检验效果不明显, 这是由于动力学模型不可靠造成的。动力学模型不可靠导致 X_k 的不可靠, 则预测残差不能准确反映观测值的异常信息。在载体扰动处, 该方案的解算精度反而降低, 原因是对预测残差统计量的误判。
- (4)若只使用以 Kalman 滤波估值为基础的观测异常检验, 其检验结果不理想, 特别在载体扰动时, 整体误差非常大, 但不能够检验到观测异常; 该方案的检验统计量不但含有观测异常, 而且含有动力学模型异常, 因此该方法的结果只能作为参考。方案④提高了动力学模型的可靠性, 进而提高了滤波的精度(图 4)。
- (5)对于以可靠观测为基础的动力学模型误差整体检验, 其只能对动力学模型进行整体检验, 若检验动力模型有异常, 可以对动力学模型采用抗差

估计, 提高动力学模型的可靠性。

5 结语

当载体扰动或者观测有异常时, 标准 Kalman 滤波的精度将会受到影响。在载体扰动过程中, 由于动力学模型不可靠, 滤波精度将会大大降低。当观测量含有异常时, 其影响 Kalman 滤波解, 进而影响下一历元的状态预测向量, 最终导致滤波精度降低。当异常类型不能准确地被判定时, 建议采用抗差 Kalman 滤波或者自适应抗差 Kalman 滤波, 这两种滤波能够降低异常的影响, 提高滤波解算的精度和可靠性。

参考文献:

[1] Teunissen P J G, Salzmann M A. A Recursive Slippage Test for Use in State-Space Filtering[J]. Manuscripta Geodaetica, 1989, 14: 383-390.

[2] Teunissen P J G. Quality Control in Navigation Systems[J]. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 1990, 5(7): 35-41.

[3] Salzmann M. Real-Time Adaptation for Model Errors in Dynamic Systems[J]. Bulletin Geodeticum, 1995, 69: 81-89.

[4] Lu G, Lachapelle G. Statistical Quality for Kinematic GPS Position[J]. Manuscripta Geodaetica, 1992, 17: 270-283.

[5] 陶本藻. 卡尔曼滤波模型误差的识别[J]. 地壳形变与地震, 1999, 19(4): 15-20.

[6] 王国富, 朱建军. 含有粗差观测值的自适应滤波[J]. 测绘通报, 2004(4): 19-21.

[7] 何海波, 杨元喜. GPS 动态测量连续周跳检验[J]. 测绘学报, 1999, 28(3): 199-204.

[8] 王甫红, 刘基余. 星载 GPS 载波相位测量的周跳探测方法研究[J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2004, 29(9): 772-774.

[9] 杨元喜. 动态系统的抗差 Kalman 滤波[J]. 郑州测绘学院学报, 1997, 14(2): 79-84.

[10] Koch K R, Yang Y. Robust Kalman Filter for Rank Deficient Observation Model[J]. Journal of Geodesy, 1998, 72(8): 436-441.

[11] Yang Y, He H, Xu G. Adaptively Robust Filtering for Kinematic Geodetic Positioning[J]. Journal of Geodesy, 2001, 75(2/3): 109-116.

[12] 杨元喜. 论动态自适应滤波[J]. 测绘学报, 2001, 30(4): 293-298.

[13] 杨元喜. Kalman 滤波异常检验[J]. 测绘科学与工程, 2005, 25(4): 1-4.