

复杂起伏地表的 POD 数值模拟

王阿霞^{1,2}, 马逸尘¹

(1 西安交通大学 理学院, 陕西 西安 710049; 2 长安大学 理学院, 陕西 西安 710064)

摘要: 对油气勘探和大地测量中的复杂起伏地表采用 POD 方法进行数值模拟。从大量的观测数据中提取出标准正交的基函数, 用这些基函数对起伏地表进行拟合。模型试验表明: 这种方法是高效可行的, 可广泛应用于数据压缩、图像处理、信号分析和流体的优化控制中。

关键词: 复杂起伏地表; POD; 基函数; 数值模拟

中图分类号: P931.2; O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6561(2008)02-0218-03

Numerical Simulation of Rugged Topography by Proper Othogonal Decomposition(POD)

WANG A-xia^{1,2}, MA Yi-chen¹

(1 School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, Shaanxi, China;

2 School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

Abstract The POD is intrduced to simulate rugged topography in hydrocarbon exploration and the GPS surveying. The main idea of POD is to extract a set of normal orthogonal basis functions from a large number of experimental data and apply them to fit rugged topography. The model tests show that the POD method is efficient and feasible. The POD method may be extensively used in data compression, image processing, signal analysis and optimal control of fluids.

Key words: rugged topography; POD; basis functions; numerical simulation

0 引言

在油气勘探和大地测量中, 如中国西部含油气盆地的勘探、珠穆朗玛峰高度的测量等, 这些地区大部分属于复杂起伏地形地貌区。复杂起伏地形地貌具有非线性、数据量超大的特点, 给数据处理带来很大不便。即使在计算机技术蓬勃发展的今天, 耗时仍很可观^[1]。

POD(Proper Orthogonal Decomposition)方法是一种用于数据压缩的多变量统计方法。它具有降阶(将高维数据投影到低维空间)和特征提取(即揭示隐藏在已知数据背后意料之外的特征)的功能。POD 方法将许多相互依赖的变量简化为少量

不相关的变量, 同时尽可能保持原始变量的多样性。该法的最大优点在于降阶后的数据是原始数据在最小二乘意义下的最优近似^[2]。

POD 方法最早被应用于统计学、气象学等领域。在统计学中被称为 Karhunen-Loeve 分解, 在气象学中被称为主成分分析法或经验正交函数法(EOF), 也有称为奇异值分解法(SVD)。1967 年 Lumley 将 POD 引入湍流研究中。目前, POD 广泛应用于数据压缩、图像处理、信号分析和动力系统的优化控制中^[3]。

1 POD 方法

假定要拟合的复杂起伏地表用函数 $z(x, y)$ 表

收稿日期: 2007-11-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(10371096)

作者简介: 王阿霞(1973-), 女, 陕西兴平人, 讲师, 博士研究生, 从事偏微分方程数值方法研究。E-mail: waxingster@gmail.com

©1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

示, 具有变量分离的近似形式

$$z(x,y) \approx \sum_{k=1}^M a_k(x) \sigma_k(y) \tag{1}$$

并且, M 趋于无穷大时, 式(1)精确成立(在一些零测集上除外)。在一般的工程应用中, 式(1)中的基函数 $\sigma_k(y)$ 可取为 Fourier 级数、Legendre 多项式、或 Cheyshev 多项式^[4-6]。不同的基函数 $\sigma_k(y)$ 对应的系数 $a_k(x)$ 不同。

如果选取的基函数正交, 即

$$\int_{y \in Y} \sigma_i(y) \sigma_j(y) dy = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

那么

$$a_k(x) = \int_{y \in Y} z(x,y) \sigma_k(y) dy \tag{2}$$

即对正交的基函数而言, 系数 $a_k(x)$ 只依赖于 $\sigma_k(y)$, 而与其他基函数无关。

POD 方法就是构造一组标准正交的基函数 $\sigma_k(y)$, 对每一个 M , 近似式(1)在最小二乘意义下最优。具体地说, 就是寻找一组标准正交的基函数 $\sigma_k(y)$; $M=2$ 时, 近似式(1)是最优的两项近似; $M=3$ 时, 近似式(1)是最优的三项近似; 依次类推。

2 POD 方法的实现

据文献 POD 基函数 $\sigma_k(y)$ 有许多构造方法^[1-3], 大致可分 2 类。

(1) 利用有限项的和代替积分, 将积分方程化为代数方程进行求解。

(2) 充分利用观测数据性质将 POD 基函数 $\sigma_k(x)$ 的构造转化为求广义矩阵特征向量问题^[7]。

第 1 类方法需要大容量高速度的计算机, 代价昂贵。第 2 类方法易于编程, 高效可行。这里采用第 2 类方法中奇异值分解法, 充分利用了奇异值分解法的几何意义。

将野外观测得到的数据 $z(x_i, y_j) (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$ 组成矩阵 $A_{m \times n}$, 即

$$A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

式中: $a_{ij} = z(x_i, y_j)$ 。将矩阵 $A_{m \times n}$ 进行奇异值分解, 记为

$$A = U \Sigma V^T \tag{3}$$

式中: U 是 $m \times m$ 的正交阵; V 是 $n \times n$ 的正交阵; T 表示矩阵的转置; Σ 是对角线以外的元素全为零的 $m \times n$ 阶矩阵。 Σ 的对角线上的元素称为 A 的奇异值, 分别记作 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 。

若记 $U \Sigma = Q$, 则 Q 是 $m \times n$ 阶矩阵, 式(3)可写为

$$A = QV^T = \sum_{k=1}^n q_k v_k^T \tag{4}$$

式中: q_k 是 Q 的第 k 列, v_k 是 V 的第 k 列。式(4)是式(1)的离散形式。易见, V 的列就是 POD 基。 V 的前 k 列就是 k 维空间的基。对于固定的 k , 这组基在最小二乘意义下最优^[3]。由于空间的维数是有限的, 所以式(1)精确成立。

给式(4)两边同时右乘 v_k , 即得式(2)离散形式。

实际计算时, A 的 k 阶近似式 A_k 为

$$A_k = U_{m \times k} \sum_k V_{n \times k}^T \tag{5}$$

式中: $U_{m \times k}$ 是 U 的前 k 列; \sum_k 是 Σ 的 k 阶主子式; $V_{n \times k}$ 是 V 的前 k 列。 k 的取值满足^[1]

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \setminus \sum_{i=1}^r \lambda_i \right) \geq 85\% .$$

POD 方法的几何解释^[2]: 矩阵 $A_{m \times n}$ 可以看成是从 n 维空间到 m 维空间的线性变换, 将 n 维空间的单位球变换为 m 维空间的椭球, 奇异值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 是这个椭球的半轴长度, 主半轴的方向由 U 的列给出, 原单位球的主半轴由 V 的列给出。 POD 方法将 $A_{m \times n}$ 看成 m 个 n 维空间的点, 对 $k \leq m$, 构造一个 k 维子空间, 使得已知点到这个子空间的距离在最小二乘意义下最优^[8]。这个 k 维子空间的基由 V 的前 k 列给出。

3 模型实验

已知曲面 $z(x,y) = 0.2e^{-(x-0.5)(y-1.0)} + 0.3\sin(xy) + 0.02xy$ 在区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$ 上 25×100 个网格点处的值。原始曲面如图 1。先将原始数据矩阵进行奇异值分解, 再利用式(5), 用 POD 方法进行低阶数值模拟。奇异值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{25}$, 如表 1。取 $k=1, 2, 3$, 拟和的结果分别如图 2 ~

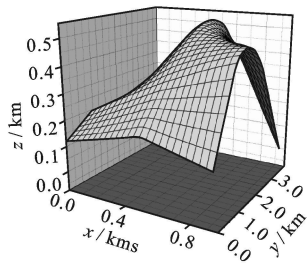


图 1 原始曲面

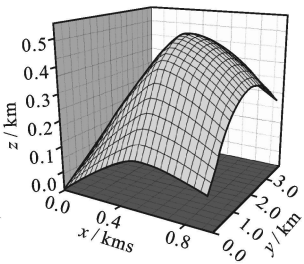


图 2 k=1 时 POD 拟合曲面

Fig. 1 Actural Surface Fig. 2 k=1 POD Simulation

4. 由表 1 知: $\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i \backslash \sum_{i=1}^{25} \lambda_i\right) \approx 100\%$, 而比较图 4, $k=3$ 时 POD 拟和曲面和图 1 原始曲面, 复杂起伏地表的形状几乎完全相同, 这说明 POD 方法的结果是准确的。

表 1 奇异值

Tab. 1 Singular Value

奇异值	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_i ($i=7, \dots, 25$)
λ	172.12	31.18	7.79	1.02	0.34	0.01	0.00

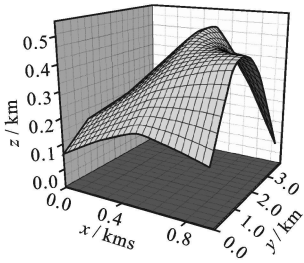


图 3 $k=2$ 时 POD 拟合曲面

Fig 3 $k=2$ POD Simulation

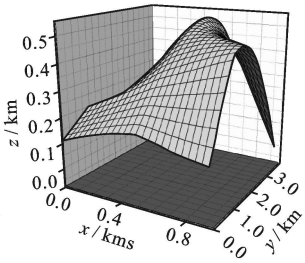


图 4 $k=3$ POD 拟合曲面

Fig. 4 $k=3$ POD Simulation

4 结语

由算例可以看出对复杂起伏地表采用 POD 方法进行数值模拟优点是计算简便、易编程、能大大

减少运算量和精度较高。还可用 POD 方法进行低微动力系统模拟, 高效可行, 能大量节约计算时间。但是, POD 方法缺点是对坐标变换很敏感和无法区分一个球面和圆环等。在实际应用时, 应仔细研究实际问题的物理背景, 灵活运用。

参考文献:

[1] ITO K, Ravindran S S. A Reduced Order Method for Simulation and Control of Fluid Flow[J] . Journal of Computational Physics, 1998, 143: 403-405.

[2] Kerschen G, Golinval J C, Vakakis A F, et al. The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems: An Overview[J] . Nonlinear Dynamics, 2005, 41: 147-169.

[3] Ravindran S S. A Proper Orthogonal Decomposition in Optimal Control of Fluids[M] . Washington: NASA, 1999.

[4] 徐萃微. 计算方法引论[M] . 北京: 高等教育出版社, 1996.

[5] 李开泰, 黄艾香, 黄庆怀. 有限元方法及其应用[M] . 西安: 西安交通大学出版社, 1992.

[6] 马逸尘, 梅立泉, 王阿霞. 偏微分方程现代数值方法[M] . 北京: 科学出版社, 2006.

[7] 程云鹏. 矩阵论[M] . 西安: 西北工业大学出版社, 1999.

[8] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义: 上册[M] . 北京: 北京大学出版社, 2000.

