

GPS 动态定位序贯平差统一模型

刘 忠¹, 黄观文², 晓光²

(1 西安市勘察测绘研究院, 陕西 西安 710054; 2 长安大学 地质工程与测绘学院, 陕西 西安 710054)

摘要: 针对 GPS 动态定位中模糊度参数个数的可变性和参考卫星变化时参数的不适用性, 导致常规序贯平差模型前后两个历元间承接关系异常复杂、计算量大、效率较低等问题, 根据 GPS 动态定位的特点, 利用转移矩阵的思想, 推导了序贯平差统一模型, 有效解决了变参数的问题。结果显示: 推导的序贯平差统一模型计算正确, 点位计算精度优于 0.482 m, 且计算效率明显优于常规模型, 便于编程运算。

关键词: 序贯最小二乘; 相对定位; 绝对定位; 动态定位; 转移矩阵

中图分类号: P228.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6561(2008)03-0319-04

Sequential Adjustment Uniform Model for GPS Kinematics Positioning

LIU Zhong¹, HUANG Guan-wen², DING Xiao-guang²

(1 Xi'an Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, Shaanxi, China;

2. School of Geological Engineering and Surveying, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China)

Abstract Since the number and character of ambiguity parameters are changeable, so the connection of general sequential adjustment between two epochs is very inefficient and complex in GPS kinematics positioning. Therefore, this paper provides an uniform model of sequential adjustment based on the characteristics of GPS kinematics positioning and transfer matrix, which can solves the problems of parameters changeable efficiency. An example indicates that the uniform model may calculate rightly, the accuracy of point is better than 0.482 m. Compared with general model, the uniform model is more efficient and convenient to program.

Key words: sequential adjustment; relative positioning; absolute positioning; kinematics positioning; transfer matrix

0 引言

GPS 动态定位中, 参数估计模型有动态卡尔曼滤波^[1]、序贯最小二乘等。相比前者容易发散的特点, 序贯最小二乘算法简单、规律性强, 且不易发散。因此, 很多学者对序贯平差进行了深入研究^[2-3]。但大多数研究都局限于通过常规模型来处理 GPS 定位数据, 这样导致了模糊度参数变化以及参考星升降时, 前后历元的承接关系异常复杂, 很大程度上制约了其在动态定位中的广泛应用。如何使序贯平差模型简化统一, 使定位程序更优化, 笔者针对这些问题, 详细推导了序贯平差统一

模型, 并通过算例验证了模型的正确性和高效性。

1 序贯平差数学模型

将观测值 L 分成两组, 分别记为 L_{k-1} 和 L_k , 它们的权阵分别为 P_{k-1} 和 P_k 。设两组观测值不相关, 即有

$$L = \begin{bmatrix} L_{k-1} \\ L_k \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_{k-1} & \\ & P_k \end{bmatrix}$$

当参数之间不存在约束条件时, 误差方程式为

$$V_{k-1} = B_{k-1}x - l_{k-1} \quad (1)$$

$$V_k = B_kx - l_k \quad (2)$$

序贯平差的计算公式^[4]为

收稿日期: 2007-10-20

基金项目: 中国地质调查局项目(1212010440410); 国家自然科学基金项目(40672173)

作者简介: 刘 忠(1979-), 男, 山西文水人, 工程师, 从事工程测量及大地测量研究。E-mail: huang830928@yahoo.com.cn

$$X_k = X_{k-1} + J L_k \quad (3)$$

$$Q_{X_k} = (I - J B_k) Q_{X_{k-1}} \quad (4)$$

式中: J 为序贯平差的增益矩阵, $J = Q_{X_{k-1}} B_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{X_{k-1}} B_k^T)^{-1}$; X_{k-1} 和 $Q_{X_{k-1}}$ 是利用第一组观测数据求得的未知参数估计和协方差阵。而参数向量的序贯解 X_k 为其先验值 X_{k-1} 与观测向量 L_k 的加权平均值。

公式(3)~(4)仅仅适用于参数不随时间变化的情况,一旦观测方程中出现参数增加或减少的情况,序贯公式的推导将变得比较复杂,不同的参数变化情况,推导的序贯模型也不相同,可变参数的序贯平差模型可见文献[5]。

2 GPS 动态定位中的序贯平差模型

2.1 观测方程

GPS 动态定位过程中,由于测站坐标向量是变化的,序贯平差实际上只是针对模糊度参数进行。设第 $i-1$ 历元观测到的卫星数为 t ,线性化后的观测方程为^[6-7]

$$V_{(i-1)} = A_{1(i-1)} X_{(i-1)} + A_{2(i-1)} N_{(i-1)} - L_{(i-1)} P_{(i-1)} \quad (5)$$

对于相对定位, $X_{(i-1)}$ 为未知观测站的点位坐标, $N_{(i-1)}$ 为 $i-1$ 历元时的双差模糊度参数;对于绝对定位, $X_{(i-1)}$ 包括未知观测站的点位坐标和接收机钟差, $N_{(i-1)}$ 为 $i-1$ 历元时的模糊度参数(也可认为是相对模糊度参数,如是相对模糊度,则参考星的模糊度被接收机钟差吸收);这里假设第 k 号卫星为参考卫星。式(5)平差,得法方程

$$\begin{bmatrix} M_{11(i-1)} & M_{12(i-1)} \\ M_{21(i-1)} & M_{22(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(i-1)} \\ N_{(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{1(i-1)} \\ W_{2(i-1)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad & \begin{bmatrix} M_{11(i-1)} & M_{12(i-1)} \\ M_{21(i-1)} & M_{22(i-1)} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} A_{1(i-1)}^T P_{(i-1)} A_{1(i-1)} & A_{1(i-1)}^T P_{(i-1)} A_{2(i-1)} \\ A_{2(i-1)}^T P_{(i-1)} A_{1(i-1)} & A_{2(i-1)}^T P_{(i-1)} A_{2(i-1)} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} W_{1(i-1)} \\ W_{2(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1(i-1)}^T P_{(i-1)} L \\ A_{2(i-1)}^T P_{(i-1)} L \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式(6)对角化后得

$$\begin{bmatrix} M_{1(i-1)} & 0 \\ 0 & M_{2(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(i-1)} \\ N_{(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1(i-1)} \\ B_{2(i-1)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中 $M_{2(i-1)} = M_{22(i-1)} - M_{21(i-1)} \text{Inv}(M_{11(i-1)})$ 。

$$M_{12(i-1)},$$

$$B_{2(i-1)} = W_{2(i-1)} - M_{21(i-1)} \text{Inv}(M_{11(i-1)})$$

$$W_{1(i-1)}$$

$\text{Inv}()$ 为求逆符号。

由式(7)直接得

$$M_{2(i-1)} N_{(i-1)} = B_{2(i-1)} \quad (8)$$

同理,第 i 历元时刻可得

$$M_{2(i)} N_{(i)} = B_{2(i)} \quad (9)$$

2.2 固定参数序贯模型

当 $N_{(i-1)}$ 和 $N_{(i)}$ 包含相同参数时,序贯平差计算公式为

$$N = \text{Inv}(M_{2(i-1)} + M_{2(i)})(B_{2(i-1)} + B_{2(i)}) \quad (10)$$

$$Q_N = M_{2(i-1)} + M_{2(i)} \quad (11)$$

2.3 变参数的序贯平差模型

式(10)~(11)仅限于两历元观测卫星相同的情况,当卫星数目增加或减少时不再适用。鉴于此,笔者提出用扩展和收缩矩阵的方法,很容易解决了可变参数的问题。为便于公式推导,首先作如下定义:

令 N' 为最大空间模糊度解向量。

$$N' = [N_{1k} \cdots N_{jk} \cdots N_{gk}]^T \quad (12)$$

式中: N_{jk} 为第 j 号卫星相对参考卫星 k 的模糊度。

$j=1, \cdots, g, j \neq k, g$ 表示最大的卫星号。

令 $N''_{(i-1)}$ 为最大观测模糊度解向量。

$$N''_{(i-1)} = [N_{l(1)k} \cdots N_{l(m)k} \cdots N_{l(\max)k}]^T \quad (13)$$

式中: \max 为截至到当前历元观测的卫星总数。 $m = [1, \cdots, \max]$; $l(m)$ 表示第 m 颗卫星对应的卫星号, $l(m) \neq k$; 定义 $l(m)$ 按值的大小顺序排列。

令 $T_{1(i-1)}$ 为 N' 到 $N_{(i-1)}$ 的转换矩阵; $T_{1(i)}$ 为 N' 到 $N_{(i)}$ 的转换矩阵。

$$N_{(i-1)} = T_{1(i-1)} N' \quad (14)$$

式中: $T_{1(i-1)}$ 的维数为 $(t-1) \times (g-1)$, 根据第 $i-1$ 历元观测卫星的数目和对应的卫星号,容易确定矩阵 $T_{1(i-1)}$,其公式为

$$T_{1(i-1)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \underset{f(i-1)}{1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$f(m)$ 表示第 m 颗卫星对应的卫星号,对应矩阵的列数, $f(m) \neq k; m=1, \cdots, (p-1)$; $T_{1(i-1)}$ 性质为

$$T_{1(i-1)} T_{1(i-1)}^T = E$$

同理,第 i 历元相应的转换矩阵 $T_{1(i)}$,其具有相同的性质 $T_{1(i)} T_{1(i)}^T = E$ 。

由式(8)~(9)、(14)可得类似式(10)的方程

$$M' N' = B' \quad (15)$$

这里: $M' = T_{1(i-1)}^T M_{2(i-1)} T_{1(i-1)} + T_{1(i)}^T M_{2(i)} T_{1(i)}$,
 $B' = (T_{1(i-1)}^T B_{2(i-1)} + T_{1(i)}^T B_{2(i)})$
式(15)系数矩阵 M' 不可逆, 需要进行可逆化处理。所谓可逆化处理就是去掉矩阵 M' 的行列元素都为 0 的对应行列, 缩小矩阵的维数, 直到 N' 中的参数与 N'' 保持一致。对于 B' , 也应相应的缩小维数。首先定义:

令 T_2 为 N' 到 N'' 的转移矩阵。
$$N' = T_2 N'' \quad (16)$$
 T_2 为 $g \times \max$ 矩阵, 矩阵 T_2 同样具有如下性质
$$T_2^T T_2 = E \quad (17)$$

式(16)可写成
$$N'' = T_2^T N' \quad (18)$$
对于转换矩阵 T_2^T 的确定, 可通过截至到本历元观测的卫星总数和卫星号确定; 还可通过搜寻矩阵 M' 中行元素都为 0 的对应行号来确定。 T_2^T 的具体形式类似于 T_1 。

根据式(18), 式(15)可写成
$$T_2^T M' T_2 N'' = T_2^T B' \quad (19)$$
式(19)可直接求解 N'' 的值。

利用式(14)~(16), 得序贯平差的统一解为
$$N = T_{1(i)} T_{2(i)} \text{Inv}(T_{2(i)}^T M' T_{2(i)}) (T_{2(i)}^T B') \quad (20)$$
$$Q_N = T_{1(i)} T_{2(i)} T_{2(i)}^T M' T_{2(i)} T_{2(i)}^T T_{1(i)}^T \quad (21)$$
如果观测卫星没有变化, 即 $T_{1(i)} T_{2(i)} = E$,
 $T_{1(i-1)} = T_{1(i)}$; 式(20)~(21)简化为

$$N = \text{Inv}(M_{2(i-1)} + M_{2(i)}) (B_{2(i-1)} + B_{2(i)}) \quad (22)$$
$$Q_N = M_{2(i-1)} + M_{2(i)} \quad (23)$$

式(22)~(23)同式(10)~(11)完全相同, 说明了固定参数序贯平差是模型式(20)~(21)的一个特解。

2.4 参考星变化的序贯平差模型

GPS 动态定位程序设计中, 一旦参考星发生变化, 模糊度参数就需要重新设置, 其上下历元的传递关系将变得非常复杂, 序贯平差模型也随之需要改动; 笔者提出对上述转移矩阵 T_1 稍加改动, 很容易解决了这个问题。设参考卫星由第 k 号卫星变成了第 $k1$ 号卫星, 原模糊度由 N_{ik} 变成了 N_{ik1} , 根据模糊度参数之间的相对关系, 对 N_{ik1} 进行分解, 得

$$N_{ik1} = N_{ik} - N_{k1k} \quad (24)$$

在序贯平差模型推导过程中, 只需对转移矩阵 T_1 稍加改动即可。设改动后的转移矩阵为 T_3 , 矩阵 T_1 中对应第 $k1$ 号卫星的那一列元素均为 -1, 其余元素不变, 即可得到矩阵 T_3 。相对方程式(21)~(22), 参考星变化的序贯平差模型为

$$N = T_{3(i)} T_{2(i)} \text{Inv}(T_{2(i)}^T M' T_{2(i)}) (T_{2(i)}^T B'') \quad (25)$$

$$Q_N = T_{3(i)} T_{2(i)} T_{2(i)}^T M' T_{2(i)} T_{2(i)}^T T_{3(i)}^T \quad (26)$$

其中: $M'' = T_{3(i-1)}^T M_{2(i-1)} T_{3(i-1)} + T_{3(i)}^T M_{2(i)} T_{3(i)}$,
 $B'' = (T_{3(i-1)}^T B_{2(i-1)} + T_{3(i)}^T B_{2(i)})$

3 推导序贯平差统一模型

第 $i-1$ 历元的法方程
$$M_{2(i-1)} N_{(i-1)} = B_{2(i-1)} \quad (27)$$

提供转移矩阵 $T_{1(i-1)}$; 如参考卫星发生变化, 提供 $T_{3(i-1)}$ 。

第 i 历元的法方程
$$M_{2(i)} N_{(i)} = B_{2(i)} \quad (28)$$

提供转移矩阵 $T_{1(i)}$ 、 $T_{2(i)}$; 如参考卫星发生变化, 提供 $T_{3(i)}$ 。

序贯平差的统一解为
$$N = \begin{cases} T_{1(i)} T_{2(i)} \text{Inv}(T_{2(i)}^T M' T_{2(i)}) (T_{2(i)}^T B') & \text{参考卫星未发生变化} \\ T_{3(i)} T_{2(i)} \text{Inv}(T_{2(i)}^T M'' T_{2(i)}) (T_{2(i)}^T B'') & \text{参考卫星发生变化} \end{cases} \quad (29)$$
$$Q_N = \begin{cases} T_{1(i)} T_{2(i)} T_{2(i)}^T M' T_{2(i)} T_{2(i)}^T T_{1(i)}^T & \text{参考卫星未发生变化} \\ T_{3(i)} T_{2(i)} T_{2(i)}^T M'' T_{2(i)} T_{2(i)}^T T_{3(i)}^T & \text{参考卫星发生变化} \end{cases} \quad (30)$$
 M', B', M'', B'' 同上。

对于 GPS 实时动态定位, 通过序贯平差公式(29)~(30)直接求解。对于 GPS 后处理动态定位, 每个历元可不求模糊度参数, 直接求解矩阵 M' , 结束后对最后一个历元的 M' 进行可逆化处理得到 M'' , 进而求解 N'' , 回代时直接从 N'' 中选出对应的模糊度参数进行后处理平差, 这样避免每个历元矩阵求逆的过程, 可大大减少运算量, 提高计算效率。

平差模型式(29)~(30)同样适用于静态定位的情况, 只是序贯平差估算参数中增加了测站的坐标^[8], 系数矩阵进行相应的扩展。另外, 如认为接收钟差稳定不变, 也可将其归入估算参数中, 推导公式类似。

4 算例分析

采用机载 GPS 航空测量的观测数据, 数据采集时间为 2005 年 5 月 12 日, 采样间隔为 1 s, 时间长度为 4.28 h。程序编写语言为 C++ 语言, 运行环境为 VC++ 6.0。计算方案有 2 套。

(1) 采用文中所示序贯平差统一模型和常规序

贯平差模型, 分别进行后处理动态精密单点定位计算; 观测方程采用双频无电离层组合, 对流层、地球自转等误差项用模型进行改正。

(2)以 2 000 个历元为例, 比较方案 1 中两种平差模型在单点定位实时和后处理时的计算时间。

增加地面参考站的数据, 利用德国 GFZ 科研软件 MFGsoft 解算差分定位结果, 以差分定位结果为真值, 分析方案 1 中采用序贯平差统一模型计算的单点定位误差, 结果如图 1。

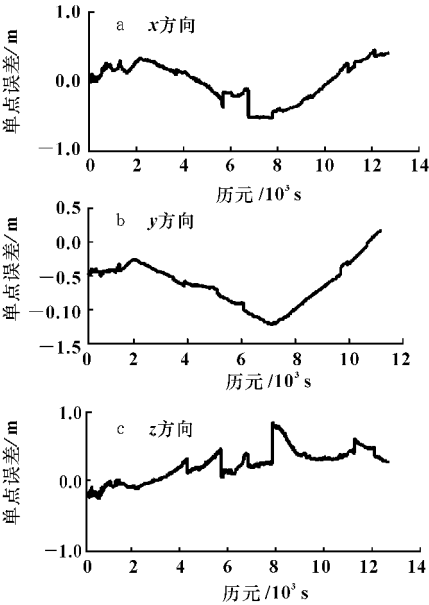


图 1 单点定位的误差分布

Fig.1 Error Distribution of Point Positioning

通过图 1 可以看出, 采用序贯平差统一模型进行动态单点定位解算, 解算结果比较平稳, x 、 y 、 z 的中误差都在 1/10 米量级。比较方案 1 中两种平差模型单点定位误差统计结果, 如表 1。

表 1 两种平差模型单点定位误差统计结果

Tab.1 Error Distribution of Point Positioning Between Two Models

平差方法	误差分布	均值/m	中误差/m
序贯平差 统一模型	x 方向	0.000	0.273
	y 方向	-0.626	0.328
	z 方向	0.255	0.224
常规序贯 平差模型	x 方向	0.000	0.273
	y 方向	-0.626	0.328
	z 方向	0.255	0.224

通过表 1 可以看出, 采用序贯平差模型解算动态单点定位, 3 个坐标分量的中误差都在 1/10 米量级, 点位精度优于 0.482 m, 完全可以满足 GPS 动

态单点定位的要求。另外, 对比两种模型解算结果, 数值完全一致, 进一步证明了序贯平差统一模型与常规模型的等价性。对于表 1 中 y 、 z 方向上存在较大的均值偏差, 笔者认为这是观测方程中存在未消除的系统误差造成的, 对研究分析影响不大。方案 2 的时间统计结果如表 2。

表 2 两种平差模型单点定位计算时间统计结果

Tab.2 Calculated Time of Point Positioning

处理	Between Two Models		t/s
	序贯平差统一模型	常规序贯平差模型	
实时处理	15.34	16.58	
后处理	15.01	32.16	

通过表 2 可以看出, 无论实时还是后处理, 序贯平差统一模型的效率都要优于常规序贯平差模型, 特别是在后处理过程中, 使用序贯平差统一模型时执行只存储不解算的预处理方法, 算法效率显著优于常规序贯平差模型。

5 结语

(1)推导的 GPS 动态定位序贯平差模型, 统一了模糊度参数个数变化以及参考星变化时的模型, 简化了前后两个历元之间的序贯承接关系, 便于编程计算。

(2)算例表明, 序贯统一模型用于 GPS 动态单点定位, 点位计算精度优于 0.482 m, 完全可满足一般工程要求, 且计算效率明显高于常规模型。

(3)序贯统一模型同样适用于 GPS 静态定位。

参考文献:

[1] 张双成, 高为广. 基于系统误差及其协方差阵拟合的抗差自适应滤波[J]. 地球科学与环境学报, 2005, 27(2): 60-62.

[2] 曾安敏, 张丽萍. 多种序贯平差方法的比较[J]. 大地测量与地球动力学, 2007, 27(2): 84-88.

[3] 隋立芬, 刘雁雨, 王 威. 自适应序贯平差及其应用[J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2007, 32(1): 51-54.

[4] 武汉大学测量平差编写组. 测量平差基础[M]. 北京: 测绘出版社, 2003.

[5] 黄维彬. 近代平差理论及应用[M]. 北京: 解放军出版社, 1992.

[6] Xu Guochang. GPS Theory, Algorithms and Applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[7] 张 勤, 李家权. GPS 测量原理及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[8] 叶世榕. GPS 非差相位精密单点定位理论与实现[D]. 武汉: 武汉大学, 2002.