第 32 卷 第 2 期 地球科学与环境学报 Vol.32 No.2
2010 年 6 月 Journal of Earth Sciences and Environment Jun.2010

秩亏自由网平差及其通解

赵超英，黄观文
（长安大学 地质工程与测绘学院，陕西 西安 710054）

摘要：通过坐标转换将初始坐标系下的特解转换得到任意坐标系下的通解，研究了秩亏自由网基准转换的实质。结果表明，秩亏自由网平差最优解实质是基于近似值所确定的基准下的最优解，在实际应用中确定合适的基准是关键。以西安地区 GPS 沉降监测网为例，不同基准下秩亏解均为该基准下最优解，但只有顾及板块运动的基准才具有物理意义。

关键词：秩亏；自由网平差；基准条件；坐标系；通解
中图分类号：P228.4 文献标志码：A 文章编号：1672-6561(2010)02-0215-03

Rank Defect Free Net Adjustment and Its General Solution

ZHAO Chao-ying，HUANG Guan-wen
(*School of Geological Engineering and Surveying，Chang'an University，Xi'an 710054，Shaanxi，China*)

Abstract：Through transforming the particular solution of initial coordinates to the general solution of arbitrary coordinate，rank defect free net adjustment is analyzed，and the essence of the datum transformation is discussed. The results show that the optimized solution of rank defect free net adjustment is the one solution under the datum which is calculated by the approximation value. In practice，the key problem is to determine the appropriate datum. GPS monitoring network in Xi'an is taken as an example to demonstrate the different optimal solutions under different data，whereas the solutions in plate motion are physically significant.

Key words：rank defect；free net adjustment；datum condition；coordinate system；general solution

0 引言

自 Messl 提出自由网平差以来[1]，其理论研究和应用研究均得到较大的发展，中国学者自 20 世纪 80 年代开始对其进行了系统研究[2-3]。后来 Xu 相继提出了非线性秩亏自由网平差的通解及其应用[4-6]，推出不同坐标系以及不同基准下的通解。笔者在介绍秩亏自由网平差通解的基础上，分析了如何将传统自由网平差扩展为各种坐标系、各种基准下的通解。这有助于理解秩亏自由网平差的实质，并在实际应用中通过确定合理的基准从而获取具有物理意义的解。

1 秩亏自由网平差原理

对于非线性大地控制网，观测方程满足

$$E(\boldsymbol{L}) = F(\boldsymbol{X}),\ \boldsymbol{L} = f(\boldsymbol{X}) + \Delta$$
$$D(\boldsymbol{L}) = \sigma_0^2 \boldsymbol{P}^{-1}$$

式中：$E(\circ)$为数学期望；$D(\circ)$为方差；σ_0 为单位权中误差；$F(\circ)$、$f(\circ)$为非线性函数；$\boldsymbol{X}$ 为初始（任意）坐标系 t 维待定坐标向量；$\boldsymbol{L}$ 为 n 维观测值向量；Δ为观测值所含的偶然误差；$\boldsymbol{P}$ 为观测值的权。通常，选定初始坐标系 $\boldsymbol{S}_0$ 下的一组初始坐标 $\boldsymbol{X}_0$，对观测方程进行线性化得

收稿日期：2009-07-15
基金项目：国家自然科学基金项目(40672173；40802075)
作者简介：赵超英(1976-)，男，山西平遥人，副教授，工学博士，从事 InSAR 理论与数据处理的教学与研究。E-mail：zhaochaoying@163.com

$$
\left.\begin{aligned} E(\boldsymbol{l}) &= \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{l} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{X} + \Delta \\ D(\boldsymbol{l}) &= \sigma_0^2\boldsymbol{P}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{1}
$$

式中：$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times t$ 维设计矩阵，其秩 $R(\boldsymbol{A})=r<t$，r 为自由度，$d=t-r$ 为秩亏数；$\boldsymbol{l}$ 为常数项；$\Delta\boldsymbol{X}$ 为初始坐标系 $\boldsymbol{S}_0$ 下的坐标改正数。观测值改正数 $\boldsymbol{V}$ 的误差方程为

$$
\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{X}-\boldsymbol{l} \tag{2}
$$

采用最小二乘准则可得基于初始坐标系 $\boldsymbol{S}_0$ 下参数的通解

$$
\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{N}^{-}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{3}
$$

$$
\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{N}^{-}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}^{-}\boldsymbol{N})\boldsymbol{M} \tag{4}
$$

式中：$\boldsymbol{N}$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{M}$ 为任意非零向量；$\boldsymbol{I}$ 为单位阵；$\boldsymbol{N}^{-}$ 为 $\boldsymbol{N}$ 的广义逆。

2 传统秩亏自由网平差方法及基准转换

2.1 传统秩亏自由网平差

传统秩亏自由网平差的主要目的是求参数的唯一解，为此附加条件，如

$$
\boldsymbol{S}_{dt}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{X}_{t1} = 0 \tag{5}
$$

式中：$\boldsymbol{S}_{d}^{\mathrm{T}}$ 为某一行满秩矩阵，且 $R(\boldsymbol{S})=d$ 为行满秩，$\boldsymbol{AS}=0$，解得

$$
\Delta\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{6}
$$

则平差后初始坐标系 $\boldsymbol{S}_0$ 下参数最佳估值 $\boldsymbol{X}$ 为

$$
\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + (\boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{7}
$$

式(5)~(7)中：$\boldsymbol{S}$ 为法方程系数 $\boldsymbol{N}$ 的零特征值对应的特征向量所构成；$\boldsymbol{X}_0$ 为参数近似值。采用最小范数条件也可以获得唯一解，文献[2-3]已证明二者是等价的，均为初始坐标系 $\boldsymbol{S}_0$ 下最小范数解。

2.2 传统自由网平差的基准转换

经典自由网平差、秩亏自由网平差、加权秩亏自由网平差和拟稳平差均为强基准。由于传统自由网平差是为获取初始坐标下的最小范数解，其基准条件为式(5)（以普通秩亏自由网为例）。

对于误差方程式(2)，设有两组不同的基准

$$
\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{X}_1 = 0 \quad 且\ R(\boldsymbol{S}_1) = d \tag{8}
$$

$$
\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{X}_2 = 0 \quad 且\ R(\boldsymbol{S}_2) = d \tag{9}
$$

式(8)、(9)中：$\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$ 为不同基准所对应的约束条件矩阵。根据传统解法，如式(6)，重写为

$$
\Delta\boldsymbol{X}_1 = (\boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l}
$$

式中：$\Delta\boldsymbol{X}_1$ 为 $\boldsymbol{S}_1$ 所对应基准下的一组解。根据文献[3]基准转换可得 $\boldsymbol{S}_2$ 对应的基准下的解 $\Delta\boldsymbol{X}_2$ 为

$$
\Delta\boldsymbol{X}_2 = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}})\Delta\boldsymbol{X}_1 \tag{10}
$$

其中，$\boldsymbol{S}$ 满足 $\boldsymbol{NS}=0$ 或 $\boldsymbol{AS}=0$，且 $R(\boldsymbol{S})=d$。式(10)便是相同坐标系 $\boldsymbol{S}_0$ 下不同基准之间的转换关系。可以看出最小范数条件只是相同坐标系下众多基准条件中的一个，在数学上均是最优的。

3 秩亏自由网平差的通解

大地测量的主要目的是获取待定点的坐标，Xu 提出的非线性秩亏自由网平差的出发点是直接求任意坐标系 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{AR}}$ 下的参数（坐标），而不再仅仅是初始坐标系下的参数（坐标）改正数，对于 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{AR}}$ 下的所有点的坐标 X_{AR} 有[4]

$$
X_{\mathrm{AR}} = \lambda_0(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{U}_0)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{t}_t = \lambda_0\boldsymbol{U}_{\mathrm{N0}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{t}_t \tag{11}
$$

式中：λ_0 为缩放系数；$\boldsymbol{U}_0$ 为 3×3 的旋转矩阵；$\boldsymbol{e}$ 为全 1 阵；$\boldsymbol{t}_t$ 为坐标系的平移向量；$\otimes$ 为克罗内克积；$\boldsymbol{U}_{\mathrm{N0}}$ 为整体旋转矩阵。实质上这 3 类参数代表了坐标系的转换参数。应用最小二乘准则可得法方程

$$
\left.\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_0}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}_{\mathrm{N0}}^{-1}\boldsymbol{X}_{\mathrm{a}} &= \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \\ \frac{1}{\lambda_0}\boldsymbol{N}\boldsymbol{U}_{\mathrm{N0}}^{-1}\boldsymbol{X}_{\mathrm{a}} &= \boldsymbol{U} \end{aligned}\right\} \tag{12}
$$

式中：$\boldsymbol{U}$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l}$，因此法方程(12)没有唯一解；$\boldsymbol{X}_{\mathrm{a}}$ 仅是法方程(12)的一个数学解但不是 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{AR}}$ 的估值。通过解法方程，可以求出任意坐标系下的坐标值，即通解 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{g}}$ 为

$$
\boldsymbol{X}_{\mathrm{g}} = \lambda_0\boldsymbol{U}_{\mathrm{N0}}\boldsymbol{N}^{-}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} + \lambda_0\boldsymbol{U}_{\mathrm{N0}}\boldsymbol{X}_0 + (\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{z}_t) \tag{13}
$$

式中：$\boldsymbol{z}_t$ 为坐标近似值所在坐标系与特解所在坐标系之间的平移向量。将式(13)的坐标系选为 $\boldsymbol{S}_0$，则有

$$
\boldsymbol{X} = \boldsymbol{N}^{-}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} + \boldsymbol{X}_0 \tag{14}
$$

这便是传统秩亏自由网的解。

4 由传统秩亏自由网平差推导的通解

从传统自由网平差的基准转换可以发现，基准与广义逆相对应，如最小范数条件对应最小范数逆 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{m}}^{-}$。因此在求解法方程时采用一般广义逆便可以概括相同坐标系下各种基准条件对应的坐标解，如式(4)或式(13)中第一部分所示。将式(7)中的 $(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{-1}$（即 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{m}}^{-}$ 之一）用 $\boldsymbol{N}^{-}$ 来代替，便得到 $\boldsymbol{S}_0$ 坐标系下所有基准的解，如式(14)。

对于任意坐标系下的解可以通过坐标相似变换来获取，将式(14)带入(11)得

$$
\begin{aligned} \boldsymbol{X}_{\mathrm{AR}} &= \lambda_0\boldsymbol{U}_{\mathrm{N0}}\boldsymbol{X} + (\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{t}_t) = \\ &\lambda_0\boldsymbol{U}_{\mathrm{N0}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} + \lambda_0\boldsymbol{U}_{\mathrm{N0}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{t}_t \end{aligned} \tag{15}
$$

式(15)是通过间接方法得到的秩亏自由网的

通解, 与式(13)通过直接方法得到的秩亏自由网通解是等价的。需要强调的是, 由于非线性平差均需要进行在选定初值下进行线性化, 而所选取的初值便隐含了一个坐标系 S_0, 因此在实际应用时, 对于非线性秩亏自由网平差, 近似值的选取不仅与线性化的精度有关, 还与其代表的基准含义密切相关, 即物理意义是否正确。

5　算例分析

在大地测量形变监测中, 需要提供一个基准, 当为秩亏问题时, 一般选取拟稳基准较为合理[7]。笔者选取西安 GPS 地面沉降和地裂缝监测网的两期监测成果进行形变分析, 该监测网共布设了 24 个测量点。2005 年 12 月开始第一期监测, 监测周期为 0.5 a, 目前已完成 6 期, 数据处理中引进了 3 个连续跟踪站(XIAA、XANY、BJFS)作为已知点。基线解算采用 GAMIT 软件处理, 网平差采用自编软件 HPGPSADJ 处理。对监测网第二、三期观测数据进行数据处理, 分别采用 2 种方案进行对比:

(1)选择 3 个稳定点(XIAA、XANY、BJFS)作为基准点, 第二期初始坐标采用框架坐标, 第三期初始坐标与第二期相同, 不考虑基准点运动速率, 利用拟稳基准进行附加系统参数的三维约束平差(方案 1)。

(2)选择 3 个稳定点(XIAA、XANY、BJFS)作为基准点, 第二期初始坐标采用框架坐标, 第三期初始坐标考虑基准点运动速率, 引入速度参数对第二期初始坐标进行改正, 利用拟稳基准进行附加系统参数的三维约束平差(方案 2)。

将 2 期获取的高程计算其沉降量, 2 种方案沉降结果如表 1。

首先本算例采用的 2 种解算方法在各自的基准下均为最优解, 表 1 表明, 考虑解算精度范围(±1 cm), 方案 1 大部分监测点呈抬升状态, 与西安地面沉降实际不符[7-8]。这说明本方案所选择的基准不正确。而方案 2 由于考虑了基准点的板块运动, 在初始坐标中引入了基准点位移信息, 其结果较为真实地反映了西安地区整体沉降特点。这说明在 GPS 沉降监测中, 不同初始坐标虽然都可以得出各自对应的最优解, 但在形变分析结果上却存在差异, 不同的初始坐标, 形变分析结果也不尽相同。如何选择合理的初始坐标, 即符合物理实际的基准模型, 对 GPS 数据后处理分析至关重要。

表 1　西安地区两种平差方案监测点沉降结果对比

Tab. 1　Comparison of Subsidence Results at Benchmarks Between Two Schemes in Xi' an

点名	方案 1	方案 2	点名	方案 1	方案 2
XANY	2.9	−5.8	XJ10	21.0	12.7
XIAA	−4.2	−13.3	XJ11	21.9	13.4
XJ01	12.4	4.1	XJ12	16.7	8.1
XJ02	−7.9	−16.6	XJA1	−33.9	−42.0
XJ03	15.5	6.8	XJA2	18.4	9.6
XJ04	19.3	10.6	XJA3	14.8	6.2
XJ06	−6.5	−15.1	XJA4	1.2	−7.7
XJ07	11.1	2.9	XJA5	13.2	4.9
XJ08	10.0	1.8	XJA6	18.7	10.2
XJ09	−9.0	−17.7			

注: 表中数据表示沉降量/ mm

6　结语

秩亏自由网平差在现代测量数据处理中非常重要, 尤其是非线性大地网秩亏平差在区域形变监测中应用很广。研究了非线性秩亏网平差解的实质, 即秩亏自由网只能提供通解, 其特解均是最优解。通常所谓最优解只是在先验基准下的最优解, 在实际应用中更重要的是要合理确定基准, 以便获取具有物理意义的最优解。

参考文献:

[1] Messl P. Die Innere Genauigkeit Eines Punkthaufens Oster[J]. Z Verm, 1962, 50: 159-165.

[2] 陶本藻. 自由网平差与变形分析[M]. 北京: 测绘出版社, 1984.

[3] 黄维彬. 近代平差理论及其应用[M]. 北京: 解放军出版社, 1992.

[4] Xu P L. A General Solution in Geodetic Nonlinear Rank-defect Models[J]. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 1997, 56(1): 1-25.

[5] Xu P L. Invariant Geodynamical Information in Geometric Geodetic Measurements[J]. Geophysical Journal International, 2000, 142(2): 586-602.

[6] Xu P L. Geodynamical Value of Historical Geodetic Measurements: a Theoretical Analysis[J]. Earth Planets Space, 2000, 52(11): 993-997.

[7] 张　勤, 黄观文, 王　利, 等. GPS 在西安市地面沉降与地裂缝监测中的应用研究[J]. 工程地质学报, 2007, 15(6): 828-833.

[8] 张永海. GPS 城市沉降监测网数据处理方法研究[J]. 地球科学与环境学报, 2009, 31(3): 327-330.