

文章编号:1672-6561(2012)04-0102-05

GM(1,1)模型的改进及其在变形预测中的应用

彭正明¹, 王腾军², 曹冬冬², 徐秋艳³

(1. 甘肃省水利水电勘测设计研究院, 甘肃 兰州 730000; 2. 长安大学 地质工程与测绘学院, 陕西 西安 710054; 3. 陕西省煤田地质局, 陕西 西安 710054)

摘 要: 为了提高 GM(1,1) 模型预测精度, 采用积分优化、二次拟合优化以及残差改化方法, 分步对 GM(1,1) 模型进行改进, 建立灰色多重修正模型。具体改进步骤为: 首先, 利用积分优化方法对背景值进行纠正, 减小模型误差并提高预测精度; 接着, 对模型参数(发展系数和灰作用量)进行二次拟合优化, 使参数更加接近理论真值; 然后, 根据预测结果进行适当的残差改化, 提高模型整体的预测精度; 最后, 建立根据 GM(1,1) 模型改进的灰色多重修正模型。以重庆南川地区甄子岩崩塌为例, 建立灰色多重修正模型对危岩裂缝累计位移值进行模拟和预测, 并与 GM(1,1) 模型进行对比。精度检验结果表明: 灰色多重修正模型后验差比值(0.082 39)明显好于 GM(1,1) 模型(0.192 67), 平均相对残差比(0.073 9)更远好于 GM(1,1) 模型(0.259 6), 表明灰色多重修正模型在预测精度上有较大提高, 可靠性更好。

关键词: 灰色模型; GM(1,1)模型; 灰色多重修正模型; 积分优化; 二次拟合优化; 残差改化; 变形预测
中图分类号: P694 **文献标志码:** A

Improvement of GM(1,1) Model and Its Application on Deformation Prediction

PENG Zheng-ming¹, WANG Teng-jun², CAO Dong-dong², XU Qiu-yan³

(1. Gansu Institute of Investigation Design and Research of Water Resources and Hydropower, Lanzhou 730000, Gansu, China; 2. School of Geological Engineering and Surveying, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China; 3. Shaanxi Bureau of Coal Geological Exploration, Xi'an 710054, Shaanxi, China)

Abstract: In order to improve the precision of prediction, GM(1,1) Model was modified by the means of integral optimization, quadratic fitting optimization and residual error modification methods step by step, and grey multiple correction model (GMCM) was built. The steps of modification included that background value was corrected by the means of integral optimization in order to reduce the error and improve the precision of prediction firstly; secondly, the parameters including developing coefficient and grey action were optimized by the means of quadratic fitting in order to make the parameters closer to the theoretical value; thirdly, residual error modification was properly done according to the prediction results in order to improve the whole precision of prediction; finally, GMCM, which was modified based on GM(1,1) Model, was built. Collapse of Zengzi Rock in Nanchuan of Chongqing was taken as an example, GMCM was built to simulate and predict the accumulated displacement of crack and was compared with GM(1,1) Model. The results of accuracy test showed that posterior error ratio of GMCM(0.082 39) was better than that of GM(1,1) Model(0.192 67), and average relative residual error ratio of

收稿日期: 2012-09-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(40972181)

作者简介: 彭正明(1964-), 男, 甘肃兰州人, 高级工程师, E-mail: sdefy_pzm@163.com。

GMCM(0.073 9) was better than that of GM(1,1) Model(0.259 6), so that the precision of prediction and reliability of GMCM were improved significantly.

Key words: grey model; GM(1,1) Model; grey multiple correction model; integral optimization; quadratic fitting optimization; residual error modification; deformation prediction

0 引言

变形是自然界普遍存在的现象。变形体的变形在一定范围内被认为是允许的,但如果超出允许值,则可能引发灾难,如何对变形体进行准确预测预报就显得尤为重要。目前,常用的变形预测模型有回归分析模型、灰色模型、时间序列分析模型和神经网络模型等^[1]。自从邓聚龙提出 GM(1,1)模型^[2]以来,该模型以建模灵活、所需数据量少的特点广泛应用于各个领域^[3-6]。但在许多实际应用中,如何有效使用该模型、提高预测精度是许多研究者关注的问题。很多研究者都致力于寻找各种方法对 GM(1,1)模型进行优化。例如谭冠军提出重构 GM(1,1)模型背景值的方法^[7];张大海等提出用原始序列中任意值代替初值的设想^[8];王成山等提出等维信息修正优化^[9]。但这些改正方法都只是单一的修正,并没有组合起来形成一个更加全面综合的优化体系。笔者以 GM(1,1)模型为基础,提出积分优化、二次拟合优化及残差改化的综合修正方法,建立灰色多重修正模型,并将该模型引入崩塌变形预测中进行计算检验。

1 GM(1,1)模型

1.1 建模可行性分析

设原始数据序列 $X^{(0)}$ 为

$$X^{(0)} = \{X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), \dots, X^{(0)}(n)\}$$

$$X^{(0)}(k-1) \in X^{(0)}, X^{(0)}(k) \in X^{(0)}$$

则级比 $\sigma^{(0)}(k)$ 为

$$\sigma^{(0)}(k) = \frac{X^{(0)}(k-1)}{X^{(0)}(k)} \quad (1)$$

式中: n 为序列中的元素总数; k 为某元素的序号。

对于给定序列 $X^{(0)}$ 能否建立较高精度的 GM(1,1)模型,可根据 $\sigma^{(0)}(k)$ 是否在所属区间来判断。当 $\sigma^{(0)}(k) \in (e^{\frac{-2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}})$ 时,原始序列可建模。

1.2 GM(1,1)模型

对原始数据序列作一次累加生成,得到相应的一次累加生成序列 $X^{(1)}$,表达式为

$$X^{(1)} = \{X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), \dots, X^{(1)}(n)\}$$

建立预测的灰微分方程

$$X^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (2)$$

$$\text{其中 } z^{(1)}(k) = [X^{(1)}(k) + X^{(1)}(k-1)]/2$$

$$k = 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

式中: a 为发展系数; b 为灰作用量; $z^{(1)}(k)$ 为背景值。

基于最小二乘准则,得

$$(a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_N \quad (4)$$

得到时间响应方程

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = [X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-ak} + \frac{b}{a}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

得到累减生成预测模型

$$\hat{X}^{(0)}(k+1) = \hat{X}^{(1)}(k+1) - \hat{X}^{(1)}(k)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n$$

式中: $\hat{X}^{(1)}(k+1)$ 为 $X^{(1)}(k+1)$ 的估计值; $\hat{X}^{(0)}(k+1)$ 为 $X^{(0)}(k+1)$ 的估计值。

1.3 精度检验

模型残差

$$q(k) = X^{(0)}(k) - \hat{X}^{(0)}(k)$$

记原始数据序列 $X^{(0)}$ 及残差数据序列的方差分别为 s_1^2 和 s_2^2 , 则有

$$s_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X^{(0)}(k) - \bar{X}^{(0)})^2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (q(k) - \bar{q})^2$$

$$\text{其中 } \bar{X}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X^{(0)}(k)$$

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q(k)$$

计算得到后验差比值 C 以及小误差概率 P

$$C = s_2/s_1 \quad (6)$$

$$P = P\{|q(k) - \bar{q}| < 0.674 5s_1\} \quad (7)$$

后验差检验是对残差分布的统计特性进行检验,它由 C 和 P 共同描述。 C 越小越好,而 P 越大越好。具体评价指标见表 1。

2 灰色多重修正模型

2.1 建模思想

为了提高 $z^{(1)}(k)$ 的精确度,利用背景值积分优

表 1 模型精度等级

Tab. 1 Precision Levels of the Model

模型精度等级	小误差概率	后验差比值
1 级(好)	0.95~1	<0.35
2 级(合格)	0.8~0.95	0.35~0.5
3 级(勉强)	0.7~0.8	0.5~0.65
4 级(不合格)	<0.7	>0.65

化法,将 GM(1,1)模型拟合的指数曲线所围得的 ADCB 面积代替梯形 ABCD,这样就可以减小模型的误差 ΔS ,运算得到的参数 a 、 b 误差也会变小,模型预测的准确性就会提高。

经过背景值积分优化,参数 a 、 b 的精度得到一定程度的提高,但为了使模型预测精度进一步提高,对参数进行二次拟合估计^[10]。

利用经上述优化后的 GM(1,1)模型进行数据拟合,大部分区间拟合效果较好,但某些区间的拟合值出现突变。为此,笔者提出采用残差改化的方法对模拟数据进行分段修正。需要特别指出,当某一区间段残差出现全负的时候,要先进行非负处理,再作残差改化^[11]。

2.2 模型的建立

由式(3)可知, $z^{(1)}(k)$ 是 $X^{(1)}(k-1)$ 与 $X^{(1)}(k)$ 的均值,可以视作梯形 ABCD 的面积(图 1)。为了提高背景值 $z^{(1)}(k)$ 的精确度,把区间划分成多个小区间,类似积分的原理用这些小区间的梯形面积之和代替实际的曲线面积。将 $[k-1, k]$ 区间 m 等分,这些小区间的面积之和 S_m 为

$$S_m = \frac{1}{2m} [(m+1)X^{(1)}(k-1) + (m-1)X^{(1)}(k)]$$

则背景值 $Z_m^{(1)}(k)$ 为

$$Z_m^{(1)}(k) = \frac{1}{2m} [(m+1)X^{(1)}(k-1) + (m-1)X^{(1)}(k)] \quad m = 2, 3, \dots, n$$

其中,等分数 m 的值可以利用经验公式确定,公式表达为

$$m = \left(\sum_{i=2}^n \frac{X^{(1)}(i)}{X^{(1)}(i-1)} \right)^{\frac{1}{n-1}} + (n-1) \quad i = 2, 3, \dots, n$$

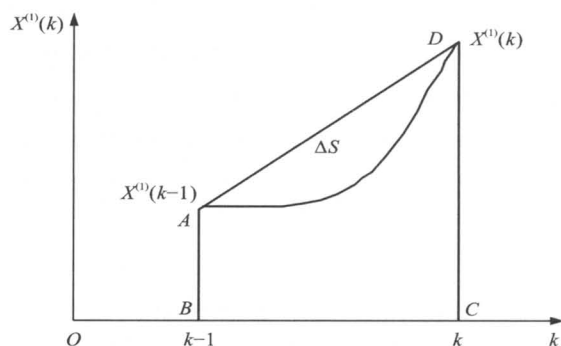
将 $Z_m^{(1)}(k)$ 代入式(2)得

$$X^{(0)}(k) + aZ_m^{(1)}(k) = b$$

由此得背景值积分优化后的预测方程

$$\hat{X}^{(0)}(k+1) = \hat{X}^{(1)}(k+1) - \hat{X}^{(1)}(k) =$$

$$[X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-ak} - [X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-a(k-1)} =$$

图 1 $z^{(1)}(k)$ 计算示意图Fig. 1 Sketch of $z^{(1)}(k)$ Calculation

$$[X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-ak}(1 - e^{-a})$$

由式(4)优化后的 a 、 b 为

$$\begin{aligned} a &= \left[\sum_{k=2}^n Z_m^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) - n \sum_{k=2}^n Z_m^{(1)}(k) x^{(0)}(k) \right] / \\ &\quad \left[\left(\sum_{k=2}^n Z_m^{(1)}(k) \right)^2 - n \sum_{k=2}^n Z_m^{(1)2}(k) \right] \quad (8) \\ b &= \left[\sum_{k=2}^n Z_m^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) Z_m^{(1)}(k) - \sum_{k=2}^n Z_m^{(1)2}(k) \cdot \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) \right] / \left[\left(\sum_{k=2}^n Z_m^{(1)}(k) \right)^2 - n \sum_{k=2}^n Z_m^{(1)2}(k) \right] \end{aligned}$$

为了使模型预测精度进一步提高,在经过背景值积分优化后继续对参数进行二次拟合估计,将背景值积分优化后的式(5)改为

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = D_0 e^{-ak} + E_0$$

$$\text{其中} \quad E_0 = \frac{b}{a}$$

$$D_0 = X^{(0)}(1) - E_0$$

式中: E_0 为灰作用量与发展系数之比; D_0 为初始值与 E_0 之差。

根据式(8)估计的 a 值及原始数据序列一次累加生成的序列中的 $X^{(1)}(k)$ 对参数 D_0 和 E_0 进行估计,得到新参数 D 和 E ,即

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{X}^{(1)} = (X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), \dots, X^{(1)}(n))^T$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} e^0 & e^{-a} & \dots & e^{-a(n-1)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$$

式中: D 为 D_0 的二次拟合估计值; E 为 E_0 的二次拟合估计值。

由最小二乘原理求得

$$\begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{X}^{(1)}$$

再求得背景值积分优化和参数二次拟合优化后

的预测方程

$$\hat{X}^{(0)}(k+1)=\hat{X}^{(1)}(k+1)-\hat{X}^{(1)}(k)=$$
$$De^{-ak}+E-De^{-a(k-1)}-E=De^{-ak}(1-e^a)$$

其中

$$D=[n\sum_{k=0}^{n-1}e^{-ka}X^{(1)}(k+1)-\sum_{k=0}^{n-1}e^{-ka}\sum_{k=0}^{n-1}X^{(1)}(k+1)]/$$
$$[(\sum_{k=0}^{n-1}e^{-ka})^2-n\sum_{k=0}^{n-1}e^{-2ka}] \tag{9}$$

最后,采用残差改化方法对出现突变的模拟数据进行分段修正。

残差序列 $q^{(0)}(k)=\{q^{(0)}(1),q^{(0)}(2),\cdots,q^{(0)}(i)\}$, i 为需要修正数据的个数。仿照灰色模型建模步骤,求得残差序列估计值

$$\hat{q}^{(0)}(k+1)=\hat{q}^{(1)}(k+1)-\hat{q}^{(1)}(k)=$$
$$Fe^{-fk}(1-e^f)$$

其中

$$F=\frac{(i\sum_{k=0}^{i-1}e^{-kf}q^{(1)}(k+1)-\sum_{k=0}^{i-1}e^{-kf}\sum_{k=0}^{i-1}q^{(1)}(k+1))}{((\sum_{k=0}^{i-1}e^{-kf})^2-i\sum_{k=0}^{i-1}e^{-2kf})} \tag{10}$$

$$f=\frac{(\sum_{k=2}^iZ_{mi}^{(1)}(k)\sum_{k=2}^iq^{(0)}(k)-i\sum_{k=2}^iZ_{mi}^{(1)}(k)q^{(0)}(k))}{((\sum_{k=2}^iZ_{mi}^{(1)}(k))^2-i\sum_{k=2}^iZ_{mi}^{(1)2}(k))} \tag{11}$$

式中: $Z_{mi}^{(1)}(k)$ 为相对于 $q^{(0)}(k)$ 优化后的背景值; $\hat{q}^{(1)}(k)$ 为序列 $q^{(1)}$ 中元素 $q^{(1)}(k)$ 的估计值。

经过上述优化后,灰色多重修正预测模型为

$$\hat{Y}^{(0)}(k+1)=\hat{X}^{(0)}(k+1)+\hat{q}^{(0)}(k+1)=$$
$$De^{-ak}(1-e^a)+Fe^{-fk}(1-e^f) \tag{12}$$

3 实例验算

本文算例选自重庆南川地区甄子岩 W12# 危岩 8# 监测点的危岩裂缝累计位移值^[12-13]。通过级比分析,原始数据可以建立高精度的灰色模型。利用 MATLAB 编程,分别利用 GM(1,1)模型及灰色多重修正预测模型对数据进行模拟预测,与原始数据进行对比,并利用式(6)、(7)对其精度进行评估。

选取前 9 期的累加位移数据,通过一次累加生成序列以及求解灰微分方程,得到 GM(1,1)模型的模拟值及预测值;同时利用式(12)计算得到灰色多重修正模型的模拟值及预测值。预测精度对比见表 2,2 种模型的预测结果及残差值见表 3 和图 2。

表 2 2 种模型的预测精度

Tab. 2 Prediction Precision of Two Models

模型	精度等级	后验差比值	小误差概率/%	平均相对残差比
GM(1,1)模型	好	0.192 67	100	0.259 6
灰色多重修正模型	好	0.082 39	100	0.073 9

表 3 2 种模型计算结果对比

Tab. 3 Comparison of the Results of Two Models mm

观测时序	位移量 原始值	GM(1,1)模型		灰色多重修正模型		备注
		位移运算值	残差值	位移运算值	残差值	
1	0	0	0	0	0	模拟值
2	25	62.19	-37.19	30.09	-5.09	
3	55	77.92	-22.92	75.12	-20.12	
4	101	97.62	3.38	108.12	-7.12	
5	132	122.31	9.69	132.05	-0.05	
6	163	153.25	9.75	162.16	0.84	
7	200	192.00	8.00	200.06	-0.06	
8	218	240.56	-22.56	212.83	5.17	
9	278	301.39	-23.39	262.20	15.80	
10	302	377.61	-75.61	321.70	-19.70	预测值
11	400	473.11	-73.11	392.69	7.31	

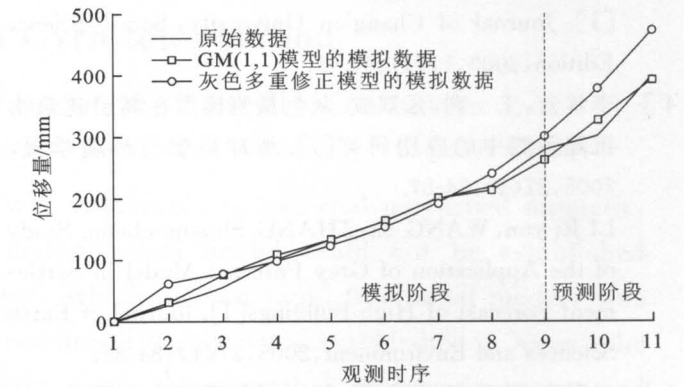


图 2 累加数据变化曲线

Fig. 2 Change Curves of Accumulating Data

4 结 语

(1)相对于 GM(1,1)模型,无论是模拟阶段还是预测阶段,灰色多重修正模型的预测值都十分接近原始值,在拟合程度上有很大提高。同时通过精度检验,后验差比值(0.082 39)明显好于 GM(1,1)模型,平均相对残差比(0.073 9)远好于 GM(1,1)模型(0.259 6),由此表明灰色多重修正模型的精度明显高于 GM(1,1)模型。

(2)灰色多重修正模型不仅在一定程度上提高了预测精度,而且还保留了 GM(1,1)模型所需数据

量少、建模灵活的优点,使得灰色模型在今后的实际应用中更加准确、可靠。

(3)采用灰色多重修正模型对崩塌进行短期预测,效果较好,但中长期预测效果还有待验证。

参考文献:

References:

- [1] 张 伟,须鼎兴,程效军.基于灰色神经网络模型的建筑物变形预测方法研究[J].科学决策,2008(11):181-182.
ZHANG Wei, XU Ding-xing, CHENG Xiao-jun. Study on Predictable Methods of Building Deformation Based on the Gray Neural Network Model[J]. Scientific Decision-making, 2008(11):181-182.
- [2] 邓聚龙.灰色系统基本方法[M].武汉:华中科技大学出版社,2005.
DENG Ju-long. Basic Methods of Grey System[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2005.
- [3] 周 凯,徐海成,张 林.收费公路权益转让价格的灰色预测[J].长安大学学报:社会科学版,2009,11(1):46-49.
ZHOU Kai, XU Hai-cheng, ZHANG Lin. Grey Prediction for Right of Price Transference of Toll Road [J]. Journal of Chang'an University: Social Science Edition, 2009, 11(1):46-49.
- [4] 李日云,王 利,张双成.灰色预测模型在高层建筑物沉降预测中的应用研究[J].地球科学与环境学报,2005,27(1):84-87.
LI Ri-yun, WANG Li, ZHANG Shuang-cheng. Study of the Application of Grey Forecast Model in Settlement Forecast of High Buildings[J]. Journal of Earth Sciences and Environment, 2005, 27(1):84-87.
- [5] 王春晓,陈开岩,赵红梅.基于灰色模型的瓦斯涌出量预测[J].煤炭技术,2012,31(2):95-97.
WANG Chun-xiao, CHEN Kai-yan, ZHAO Hong-mei. Amount of Gas Emission Prediction Based on Grey Model[J]. Coal Technology, 2012, 31(2):95-97.
- [6] 张清华,隋立芬,牟忠凯,等.利用改进灰色模型的钟差预报算法及其精度分析[J].测绘科学,2012,37(1):51-53.
ZHANG Qing-hua, SUI Li-fen, MOU Zhong-kai, et al. A Prediction Method of the Clock Errors Based on Modified Grey Model[J]. Science of Surveying and Mapping, 2012, 37(1):51-53.
- [7] 谭冠军. GM(1,1)模型的背景值构造方法和应用(I)[J].系统工程理论与实践,2000,20(4):98-103.
TAN Guan-jun. The Structure Method and Application of Background Value in Grey System GM(1,1) Model(I)[J]. Systems Engineering-theory and Practice, 2000, 20(4):98-103.
- [8] 张大海,江世芳,史开泉.灰色预测公式的理论缺陷及改进[J].系统工程理论与实践,2002,22(8):140-142.
ZHANG Da-hai, JIANG Shi-fang, SHI Kai-quan. Theoretical Defect of Grey Prediction Formula and Its Improvement[J]. Systems Engineering-theory and Practice, 2002, 22(8):140-142.
- [9] 王成山,杨 军,张崇见.灰色系统理论在城市年用电量预测中的应用[J].电网技术,1999,23(2):15-18.
WANG Cheng-shan, YANG Jun, ZHANG Chong-jian. Application of Grey System Theory in City Electricity Demand Forecasting[J]. Power System Technology, 1999, 23(2):15-18.
- [10] 田卿燕,傅鹤林.基于灰色突变理论的块裂岩质边坡崩塌时间预测[J].华南理工大学学报:自然科学版,2009,37(12):122-126.
TIAN Qing-yan, FU He-lin. Failure Time Prediction of Slope Collapse of Block Rockmass Based on Gray and Catastrophic Theories[J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2009, 37(12):122-126.
- [11] 李晓蕾,刘 睿,田永瑞,等.基于灰色预测的空间多点残差修正模型研究[J].大地测量与地球动力学,2010,30(5):125-128.
LI Xiao-lei, LIU Rui, TIAN Yong-rui, et al. Study on Spatial Multi-point Residual Model Based on Grey Prediction[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2010, 30(5):125-128.
- [12] 任幼蓉,陈 鹏,张 军,等.重庆南川市甑子岩W12#危岩崩塌预警分析[J].中国地质灾害与防治学报,2005,16(2):28-31.
REN You-rong, CHEN Peng, ZHANG Jun, et al. Early-warning Analysis on the Rockfall for Zenziyan W12# Dangerous Rock Mass in Nanchuan City of Chongqing[J]. The Chinese Journal of Geological Hazard and Control, 2005, 16(2):28-31.
- [13] 张玉萍,唐红梅.危岩变形的灰色预测方法及应用[J].重庆交通大学学报:自然科学版,2008,27(1):85-90.
ZHANG Yu-ping, TANG Hong-mei. Application of Grey Prediction Method to Perilous Rock Deformation [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University: Natural Science, 2008, 27(1):85-90.